Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Organ van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

63e jaargang
1987 | 1988
september

Euclides 1

Wolters-Noordhoff

Euclides

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt ƒ55,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. ƒ37,50; contributie zonder Euclides ƒ30,–.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij M. C. van Hoorn, Postbus 9025, 9703 LA Groningen. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van $1^1/_2$, bij voorkeur op Euclides-kopijbladen. De redactiesecretaris P.E. de Roest, Blijhamsterweg 94, 9672 XA Winschoten, tel. 05970-2 20 27 stuurt desgevraagd kopijbladen met gebruiksaanwijzing toe. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs H. Bakker, Breitnerstraat 52^c, 8932 CD Leeuwarden, tel. 058-13 59 76.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland.
Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden ƒ48,75. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement ƒ29,50.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers ƒ8,25 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

ISSN 01.65-0394

Bij het begin van de 63e jaargang

Het Nederlandse wiskunde-onderwijs krijgt alom aandacht, méér aandacht dan er wel eens geweest is. Zo zijn er de klachten over de geringe rekenvaardigheid van Pabo-studenten, vergezeld van de suggestie om havo met wiskunde verplicht te stellen voor toelating tot de Pabo.
Mede daardoor wordt de aandacht gericht op de Hawex, de nieuwe havo-wiskunde, die al dit jaar op drie scholen wordt ingevoerd (en vervolgens waar nodig bijgesteld). De Hawex volgt op de Hewet voor het vwo. Dit jaar zijn op alle vwo-scholen de examens nieuwe stijl afgenomen. Elders in dit nummer staat een eerste bericht van het Cito over de vwo-examens.
Wiskunde A wordt op het vwo gevolgd door een zeer groot deel van de leerlingen. Dit lijkt aardig tegemoet te komen aan de 'Kies-Exact'-acties, waarmee de Staatssecretaris veel publiciteit haalde; zij wil overigens wiskunde nog steeds verplicht stellen. Of dat doorgaat wordt door velen betwijfeld.
De nieuwe havo-wiskunde alleen al bewerkstelligt dat de C- en D-examens voor mavo en lbo (het afgelopen examenjaar voor het eerst met 70% meerkeuzevragen en 30% open vragen) onderwerp van discussie blijven. Gaat deze examenvorm zich handhaven? Voorlopig is dat nog een vraag.
Intussen is de COW, de Commissie Onderbouw Wiskunde, onder voorzitterschap van Prof. van der Blij met zijn werkzaamheden gestart. De COW zal zich uiteraard mede richten op de beoogde Basisvorming, waarin wiskunde voor iedereen verplicht moet zijn. Van groot belang is, dat de COW de volle breedte, dus ook het beroepsonderwijs, gaat bezien.
De nieuwe vwo-programma's hebben mede een bezinning op gevolgde didactische methodieken teweeg gebracht. Gelet op datgene wat er op stapel staat zal in het gehele voortgezet onderwijs een bezinning op didactische methodieken volgen.
Euclides wil ook het komende jaar proberen al de geschetste ontwikkelingen zo goed mogelijk te volgen. Dat daarbij de inbreng en steun van de 4000 Euclides-lezers zeer geapprecieerd zullen worden is duidelijk.
De redactie ontvangt graag bijdragen (of: suggesties voor bijdragen) uit de kring van de lezers!
Daarnaast wil de redactie graag aandacht geven aan opvattingen en inzichten uit het buitenland, en aan ontwikkelingen die zich daar voordoen.

Wie van dit tijdschrift óók het colofon leest kan vaststellen dat de samenstelling van de redactie gewijzigd is.
In de nazomer van 1986 beëindigden Frans Dolmans (tot dan hoofdredacteur) en Leo Muskens hun redactionele werkzaamheden. Vanaf deze plaats danken we hen voor datgene wat ze voor Euclides gedaan hebben.
Vooral dank zij de bezielende leiding van Fred Goffree is Euclides het afgelopen jaar op een alleszins verantwoorde wijze doorgekomen. Hij heeft vele contacten gelegd, ontwikkelingen in gang gezet en gestructureerd, en – vooral – kopij weten te verwerven. Ook het eerste nummer van de 63e jaargang, dat thans voor u ligt, is voor een belangrijk deel nog gevuld met artikelen die tot stand kwamen in de periode dat hij het hoofdredacteurschap waarnam. Dank, heel veel dank!
Eerder al had Fred Goffree aangekondigd de redactie te zullen verlaten. Ook Ine van Breugel heeft nu de redactie verlaten; haar zeggen we graag dank voor haar immer constructieve inbreng binnen de redactie.
Tot de redactie toegetreden zijn Gerben Bulthuis (werkzaam aan een Universitaire Lerarenopleiding), Martinus van Hoorn (werkzaam in het havo-mbo), Victor Schmidt (werkzaam in het hbo) en Bram van der Wal (werkzaam in het lbo).

Wij hopen op voortzetting van de goede relatie met het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en met de uitgever.

De redactie

Wat kunnen we er aan doen dat men wiskunde mijdt?*

Peter J. Hilton

Men zou de zeventiger jaren de periode van de angst kunnen noemen. De OPEC landen verhoogden in 1973 de prijs van olie tot het viervoudige en dit betekende het begin van een periode van grote economische onzekerheid voor de geïndustrialiseerde landen van de wereld. Aan het eind van de zeventiger jaren werden 52 Amerikanen in gijzeling gehouden in de ambassade van de Verenigde Staten in Teheran en zorgden meer dan 50.000 Russische manschappen in Afghanistan er voor dat dit land een vazalstaat van de Sovjet-Unie bleef. Deze periode van de angst zou in politieke en economische zin de voorloper kunnen zijn van een periode van wanhoop.

Maar de mensen maken zich niet alleen maar in politiek en economisch opzicht zorgen over hun levensomstandigheden. De ontwikkelingen in de technologie brengen eveneens gevaren met zich mee. Aan de ene kant maakt men zich voortdurend zorgen over de niet te stuiten verontreiniging van het milieu die veroorzaakt wordt door spuitbussen die de ozonlaag vernietigen, door het lozen van gevaarlijk kernafval en ongelukken in kerncentrales en door uitlaatgassen die de atmosfeer vervuilen. Aan de andere kant brengen de ontwikkelingen in de technologie de noodzaak met zich mee dat men wetenschappelijke processen beter leert begrijpen en dat men beter om leert gaan met machines, maar de meeste mensen voelen zich hier absoluut niet toe in staat. Bovendien werken door een combinatie van maatschappelijke en economische factoren meer vrouwen dan ooit buitenshuis en veel van hen zijn ernstig gehandicapt door het feit dat ze niet in staat zijn tot het kwantitatieve denken dat voor de baan die ze ambiëren nodig is. Zo worden de mensen in het dagelijkse leven in hun aspiraties wat werk en promotie betreft geconfronteerd met problemen die te maken hebben met veranderingen in de technologie en lacunes in hun opleiding. Willen we voorkomen dat de komende jaren een periode van wanhoop voor het onderwijs worden, dan moeten we naar een oplossing zoeken voor het probleem van hoe we onderwijs aanbieden dat voorziet in de behoeften van de mensen van nu en in de toekomst. Bezien vanuit het perspectief van de technologische ontwikkelingen is het duidelijk dat het wiskunde-onderwijs het voornaamste onderwijsprobleem is.

Tenzij men de pessimistische en niet te rechtvaardigen opvatting huldigt dat de meeste mensen niet in staat zijn om een eenvoudige wiskundige redenering te volgen of een elementaire wiskundige vaardigheid onder de knie te krijgen, is de conclusie onontkoombaar dat het wiskunde-onderwijs ernstige gebreken vertoont. De resultaten van het wiskunde-onderwijs zijn ten enenmale onbevredigend, getuige de vele initiatieven die tegenwoordig genomen worden om volwassenen hun aversie tegen wiskunde te helpen overwinnen. Sheila Tobias heeft een onafhankelijke organisatie op touw gezet onder de naam Overcoming Math Anxiety en heeft een boek met dezelfde titel geschreven[5]. Stanley Kogelman heeft met hetzelfde doel een organisatie genaamd Mind over Math opgericht en hij heeft ook (met Joseph Warren) een boek met de titel van zijn organisatie geschreven[4]. Dit zijn maar twee voorbeelden van de talloze initiatieven die in de Verenigde Staten genomen worden om een wijdverbreid probleem op te lossen dat uit de hand dreigt te lopen. Alle deskundigen zijn het erover eens dat het probleem niet uitsluitend veroorzaakt wordt door de aard van de wiskunde en de aard van het huidige wiskunde-onderwijs. Er zijn sterke factoren in de samenleving die haaks staan op doelmatig wiskunde-onderwijs. Sommige van deze factoren hebben een wel zeer schadelijk effect op vrouwelijke studenten. Elizabeth Fennema, Lucy Sells, Sheila Tobias en anderen hebben hierover indringende en verontrustende analyses geschreven. Wij willen er aan toevoegen dat gemakzucht, het snel resultaat willen zien, een van de belangrijkste factoren is die tegenwoordig goed wiskunde-onderwijs in de weg staan, maar dit geldt in feite

voor het gehele onderwijs. Het leerproces verloopt langzaam, stap voor stap en wordt in het algemeen pas op langere termijn met succes bekroond. De jeugd van tegenwoordig bezit weinig geduld en is niet bereid om nu hard te werken om daar in de toekomst van te profiteren. Wij willen in dit artikel stellen dat het niet nodig is om de vruchten van hard studeren pas in de verre toekomst te plukken want een vooruitstrevend wiskunde-leerplan kan de belangstelling van leerlingen op ieder niveau wekken en voor erg leuke ervaringen zorgen. Het is en blijft echter een feit dat een volwassene zijn/haar hele leven blijft profiteren van een goede opleiding, net zoals een mislukte opleiding onaangename gevolgen heeft.

Snel resultaat willen zien

Twee andere factoren die doelmatig onderwijs in de weg staan en die niet direct verband houden met het probleem van vrouwen of wiskunde-onderwijs in het bijzonder zijn het gevolg van de behoefte om onmiddellijk resultaat te zien. De eerste is de opvatting dat het onderwijs in de eerste plaats ten doel heeft om een hoge levensstandaard te garanderen. Op de een of andere manier is in de loop van onze geschiedenis het besef verloren gegaan dat door onderwijs onze geest verrijkt wordt en zo onze individuele aard en eigenschappen zich kunnen ontplooien. Natuurlijk verwachten we als een soort nevenprodukt van onze opleiding dat we aan het eind ervan uit een aantal carrièremogelijkheden kunnen kiezen die de moeite waard zijn. Maar er bestaat in onze maatschappij geen simpel verband (in de zin van een hoge positieve correlatie-coëfficiënt) tussen het intrinsieke belang van een baan en het salaris dat er aan verbonden is. En ons onderwijs dat ons voorbereidt op interessante loopbanen kan ons zelfs ongeschikt maken voor functies die wel hoge salarissen te bieden hebben, maar verder weinig anders dat echt de moeite waard is. Laat de mensen die geloven dat die 'simpele verhouding' is zoals het hoort maar moeite doen om hun doel te bereiken. Laten we alleen het onderwijs niet zo oneigenlijk gebruiken dat het slechts materiële welvaart ten doel heeft zonder rekening te houden met de behoeften en mogelijkheden van het individu.
De tweede ongunstige factor die het onderwijs in de weg staat is de pure commercie. Het is vooral in onze televisieprogramma's dat de nadelige gevolgen van de alom aanwezige commercie op de kwaliteit van ons leven en op de doelmatigheid van ons onderwijs zichtbaar zijn. Bedrieglijke reclame 'garandeert' dat behoeften onmiddellijk bevredigd worden en roem en succes lijken makkelijk te bereiken voor iedereen. Passief gedrag wordt echter de regel en de werkelijkheid wordt vervangen door de dubieuze charmes van synthetische spanning. Kinderen brengen gemiddeld meer tijd voor de 'buis' door dan in de klas. En men verwacht dat de school (met een enorme financiële achterstand) met de eindeloze series en wat dies meer zij concurreert om de aandacht en belangstelling van de kinderen op te eisen. Hier is inderdaad alle reden tot pessimisme. Als de Russische autoriteiten echt zo subtiel waren als sommigen denken dan zouden ze in het geheim steun verlenen aan commerciële televisiemaatschappijen in plaats van aan pseudo-marxistische organisaties.

Gemakzucht, het snel resultaat willen zien, is een van de belangrijkste factoren, die tegenwoordig goed wiskunde-onderwijs in de weg staan; maar dit geldt in feite voor het gehele onderwijs.

Deze factoren in aanmerking genomen (en we hebben ze lang niet allemaal genoemd – het tekort aan geld in het onderwijs, de te lage salarissen en het gebrek aan aanzien van het beroep van leraar zijn een paar andere factoren die het onderwijs verlammen) is het geen wonder dat er zulke grote problemen zijn! Maar daarbij komen ernstige gebreken in het wiskunde-onderwijs zelf. We zullen de rest van dit artikel grotendeels wijden aan die specifieke gebreken, maar eerst moeten we iets aan de orde stellen dat wij van groot belang vinden om het probleem in het juiste perspectief te zien.
Het gaat om een eenvoudige, zelfs een voor de hand liggende, kwestie. Ondanks alle moeilijkheden waar het onderwijs mee te kampen heeft en de bijzondere problemen van het wiskunde-onderwijs is de angst voor wiskunde geen ziekte! Veel mensen die het probleem proberen op te lossen gebruiken therapeutische taal. De term van Sheila Tobias,

'wiskunde-angst' is praktisch overal ingeburgerd geraakt; de term 'wiskunde-fobie' wordt ook gebruikt, er zijn 'wiskunde-klinieken' waar men mensen van hun angst probeert te genezen en de auteurs van Mind over Math staan op de omslag van hun boek vermeld als 'Dr. Stanley Kogelman en Dr. Joseph Warren', alsof ze twee artsen zijn die een sensationele nieuwe behandeling voor een gevreesde ziekte aankondigen. Dit taalgebruik is niet alleen ongepast, maar het geeft ook een verkeerde indruk die gevaarlijk is. Het suggereert namelijk dat iedereen die angst heeft voor wiskunde aan een bijzondere kwaal lijdt. De kans is groot dat men de oorzaak hiervoor bij zichzelf gaat zoeken ('Ik was altijd slecht in wiskunde', 'Wiskunde was mijn slechtste vak', 'Op de een of andere manier heb ik nooit wat van wiskunde begrepen') en zo het zelfvertrouwen verliest om iets in de wiskunde te bereiken. (Het is ook waar dat veel mensen die succes hebben op een bepaald gebied vol trots laten weten dat ze weinig van wiskunde weten. Dit omgekeerd snobisme is op zichzelf al een barrière voor een ruimer verbreid begrip van wiskunde.)

Slechte en goede wiskunde

In werkelijkheid is heel veel van het traditionele wiskunde-leerplan, vooral op elementair niveau, om te huilen: het is geen goede wiskunde, het is zinloos en saai. Het is dan ook een volkomen gezonde reactie om het te vermijden. Op z'n best is deze stof geschikt voor machines en het is wel ironisch dat wij in de Verenigde Staten aan de ene kant veel waarde hechten aan het idee van mensenrechten en dat individuele ontplooiing bij ons hoog in het vaandel staat, maar dat wij aan de andere kant het grootste deel van ons onderwijs er op richten om onze kinderen in efficiënte machines te veranderen die accurate antwoorden op mechanische problemen kunnen geven en hun individualiteit vernietigen door hun antwoorden te standaardiseren. Zelfs de meest toegewijde en bekwame docenten – en die zijn er heel veel – zullen de moed verliezen bij de formidabele en onnatuurlijke taak om iets leuks te maken van het maken van staartdeelsommen! Maar het probleem wordt nog erger gemaakt doordat veel docenten in het basisonderwijs niet bedreven zijn in wiskunde, zelf niet van het vak houden en er niet mee vertrouwd zijn. Leerkrachten kunnen hun leerlingen op zoveel subtiele manieren laten merken wat ze ergens van vinden – zonder dat ze zich daar dikwijls van bewust zijn – en het is duidelijk wat voor invloed dat op de kinderen heeft. Kinderen (misschien vooral meisjes), voor wie de leerkracht een rolmodel is, raken zich bewust van zijn of haar instelling en nemen die over. Zo wordt een tegenzin in wiskunde makkelijk overgenomen. Het is ironisch dat kinderen zo een afkeer van wiskunde krijgen voordat ze met echte wiskunde te maken hebben gekregen in de betekenis die de wiskundige er aan geeft. Waar kinderen een hekel aan hebben is hoofdrekenen en rekenkundige vaardigheden leren die niets met hun belevingswereld te maken hebben. Als we onze wiskundelessen effectiever willen maken moeten we toch zeker de nadruk leggen op leerstof die voor de kinderen toegankelijk en nuttig is. Het is jammer dat dit in het basisonderwijs meestal niet het geval is, hoewel er natuurlijk veel bemoedigende voorbeelden zijn van wat men ontegenzeglijk kan bereiken met een vooruitstrevend leerplan dat tegemoet komt aan de natuurlijke belangstelling, nieuwsgierigheid en instelling van kinderen, zeker wanneer de leerkracht inziet waarom het belangrijk is om een probleem wiskundig te leren benaderen. Maar in de meeste gevallen gaat achter de misleidende term 'wiskunde' een vak schuil dat grotendeels bestaat uit een reeks mechanische oefeningen. Zo verliest het vak snel zijn populariteit en het verschil in presentatie tussen wiskunde en de andere vakken zal er gauw toe leiden dat de kinderen voorgoed hun belangstelling voor wiskunde verliezen.

De 'Back to Basics' beweging is het beste voorbeeld van de mechanische benadering waar we op doelen. Deze beweging raakte in een stroomversnelling door de algemene onvrede over de resultaten van

---

Het ziet er naar uit dat de "Back to Basics"-beweging juist iets probeert te bereiken wat niet alleen niet de moeite waard is, maar wat nu juist beslist niet gedaan moet worden.

---

de veranderingen die begonnen aan het eind van de vijftiger jaren en in de zestiger jaren en die vaak omschreven worden als de Nieuwe Wiskunde (New Math). We willen niet beweren dat de Nieuwe Wiskunde een succes was, maar zij die er kritiek op hebben moeten een aantal dingen niet vergeten. In de eerste plaats kreeg slechts een minderheid van de leerlingen (misschien 15%) met de oorspronkelijke Nieuwe Wiskunde te maken. Daarom kan men de statistieken die door de voorstanders van 'Back to Basics' aangegrepen worden om te wijzen op de daling van het wiskunde-niveau niet toeschrijven aan de Nieuwe Wiskunde. In de tweede plaats wijst het feitenmateriaal veeleer uit dat de Nieuwe Wiskunde aantrekkelijker was voor de leerlingen dan de traditionele wiskunde. In de derde plaats was datgene wat men met de Nieuwe Wiskunde probeerde te bereiken ongetwijfeld de moeite waard.
Het ziet er naar uit dat de 'Back to Basics'-beweging juist iets probeert te bereiken wat niet alleen niet de moeite waard is, maar wat nu juist beslist niet gedaan moet worden. Deze voorstanders van reactie willen dat onze kinderen teruggaan naar iets dat nooit 'basic' is geweest en veel minder fundamenteel is dan ooit tevoren. Nu zakrekenmachientjes gemeengoed zijn is het volstrekt absurd om speciaal aandacht te besteden aan de saaie mechanische rekensommen waar kinderen voor altijd een aversie tegen wiskunde aan overhouden. Natuurlijk moeten kinderen over een bepaalde parate kennis en rekenvaardigheid beschikken, maar dat wil niet zeggen dat ze deze als pure geheugentraining moeten leren die niets te maken heeft met het doel waarvoor die kennis en vaardigheid gebruikt moeten worden. Er bestaat aantrekkelijk lesmateriaal voor de lagere klassen met de juiste nadruk op de kennis die nodig is om met succes wiskunde te leren. Maar dit materiaal bevat ook veel speelse elementen in de vorm van wiskundespelletjes (een integraal deel van het materiaal) die de kinderen met meer succes en plezier kunnen spelen als ze over de goede parate kennis beschikken. (De auteur kan uit eigen ervaring *Real Math*, uitgegeven door de Open Court Publishing Company, warm aanbevelen, evenals het *Comprehensive Schools Mathematics Program*, ontwikkeld bij CEMREL in St. Louis.)

De tekortkomingen van het wiskunde-onderwijs

Het is nu zaak om een meer specifieke diagnose te stellen van de huidige tekortkomingen van het wiskunde-onderwijs en suggesties te doen voor mogelijke verbetering. Wij willen het over het onderwijs aan kinderen en aan volwassenen hebben, maar we moeten er op wijzen dat dit verschillende problemen zijn, hoewel ze natuurlijk wel met elkaar te maken hebben. Laten we eerst eens het patroon van het aanvangsonderwijs in de wiskunde bekijken en analyseren welke aspecten daarvan het meest tot wiskunde-angst van de leerlingen leiden. De negatieve aspecten kunnen globaal gesproken omschreven worden als ontmenselijking, kunstmatigheid, autoritaire opstelling en oneerlijkheid. Hoofdrekenen en afhankelijkheid van het geheugen zijn voorbeelden van ontmenselijking; vergezochte toepassingen en gekunstelde problemen zijn voorbeelden van kunstmatigheid en het strikt toepassen van formele procedures is een voorbeeld van autoritaire opstelling. Voorbeelden van oneerlijkheid zijn gebrek aan openhartigheid, niet te rechtvaardigen pogingen tot motivatie, onjuiste beweringen en verzonnen toepassingen. Wij hebben elders[1] gedetailleerde voorbeelden van deze tekortkomingen gegeven. Hier willen we ons tot een ervan beperken, namelijk het leren optellen van breuken.

Soms wordt dit gerechtvaardigd (bijvoorbeeld in[3]) door te verwijzen naar een toekomstig onderwerp dat veel van de leerlingen nooit zullen zien. Soms wordt het behandeld als een vaardigheid die aangeleerd moet worden zonder te vragen waarom. Soms worden 'authentieke' situaties gepresenteerd waarvoor het nodig zou zijn om het optellen van breuken te beheersen. In dat geval had het probleem echter in feite niets met breuken te maken of zou het probleem niet op te lossen geweest zijn met het bewuste model voor het optellen of aftrekken van breuken. Zo treffen we in een leerboek de volgende som aan: 'Op maandag zwemt John $22\frac{2}{3}$ meter en op dinsdag $23\frac{4}{7}$ meter. Hoe ver heeft hij op beide dagen in totaal gezwommen?' De toepassing is gekunsteld omdat John nooit zou weten dat hij deze vreemde fractionele afstanden had gezwommen! Hij zou wel de afstand die hij had gezwommen in tienden van een meter geweten hebben en het

optellen van decimalen is makkelijk. De som is pedagogisch oneerlijk, omdat men het kind ervan probeert te overtuigen dat het breuken moet leren optellen om interessante vragen te kunnen beantwoorden, maar als de vraag op een eerlijke manier gesteld was zouden er nooit breuken aan te pas zijn gekomen. In een ander boek vinden we de volgende som: 'Je hebt $\frac{2}{3}$ kopje meel en je hebt $\frac{3}{4}$ kopje nodig. Hoeveel meel moet je er bij doen?' Zelfs gesteld dat het kind ooit in zo'n situatie zou verkeren, dat zou het gewoon het kopje tot het $\frac{3}{4}$ maatstreepje bijvullen. Er is geen kok ter wereld die $\frac{2}{3}$ van $\frac{3}{4}$ zou aftrekken, $\frac{1}{12}$ kopje zou afmeten en dat bij $\frac{2}{3}$ van een kopje doen dat al afgemeten was.

Genoeg van deze voorbeelden. Wat moeten we doen om de situatie te verbeteren? Het antwoord is eenvoudig en ligt voor de hand: vermijd deze grove fouten tegen de didactiek! Maar in de praktijk is het niet zo eenvoudig. We hebben veel redenen gegeven voor de traagheid in het systeem en voor het opvallend vasthouden aan ingeburgerde gewoonten die doelmatig wiskunde-onderwijs in de weg staan. Laten we geen doekje winden om een andere machtige factor in het handhaven van de status quo – de gestandaardiseerde toetsen. Deze toetsen die bij (sommige) onderwijspsychologen en (veel) schoolleiders geliefd zijn versterken de kunstmatigheid die al in de leerstof aanwezig is. Ze dwingen de leerlingen tot het beantwoorden van kunstmatige vragen onder kunstmatige omstandigheden. Ze leggen strikte en kunstmatige tijdsbeperkingen op. Zij versterken de misvatting dat wiskunde onderverdeeld kan worden in kleine, hermetisch afgesloten hokjes. Zij verkondigen de tegennatuurlijke leer dat er op een wiskundig probleem maar een enkel juist antwoord is en dat alle andere antwoorden fout zijn. Zij houden absoluut geen rekening met het wiskundig proces en concentreren zich uitsluitend op het 'antwoord'. Meerkeuzevragen zijn bijzonder slecht en absurd. Ik houd me nu al haast 40 jaar beroepshalve met wiskunde bezig en ik heb nog nooit een situatie meegemaakt (uitgezonderd de theorie van de eindige groepen), waarin ik met een wiskundeprobleem te maken had en waarvan ik wist dat het goede antwoord een van vijf was. Bovendien zou mijn benadering in het theoretische geval dat ik voor zo'n situatie zou komen te staan, heel anders zijn en moeten zijn dan in een situatie waarin ik

Toetsen tiranniseren ons, zowel de docenten als de kinderen. Er wordt zoveel waarde aan gehecht dat ze de keuze van leerstof en de natuurlijke stijl van lesgeven in ongunstige zin beïnvloeden. Ze worden zo vaak afgenomen dat de kinderen (en misschien ook de docenten) de indruk krijgen dat ze de reden zijn waarom wiskunde geleerd wordt.

gewoon het probleem moest oplossen.
Toetsen tiranniseren ons, zowel de docenten als de kinderen. Er wordt zoveel waarde aan gehecht dat ze de keuze van leerstof en de natuurlijke stijl van lesgeven in ongunstige zin beïnvloeden. Ze worden zo vaak afgenomen dat de kinderen (en misschien ook de docenten) de indruk krijgen dat ze de reden zijn waarom wiskunde geleerd wordt. (Ik heb zelfs wel eens een artikel gelezen waarin gesteld werd dat de leerlingen staartdelingen moeten leren omdat ze in de toetsen voorkomen!).
Misschien zijn sommige toetsen goed – maar wat mij betreft: weg met de rest!

Positieve principes van goed lesgeven

Misschien wordt in het voorgaande de indruk gewekt dat de principes van goed lesgeven grotendeels negatief zijn: vermijd de fouten van de traditionele manier! Er zijn echter ook belangrijke positieve principes te noemen. We noemen er een paar: (a) men moet regelmatig wijzen op echte toepassingen die van belang voor de leerlingen zijn – een toepassing is echt als deze een wezenlijk probleem oplost dat zonder het wiskundeonderwerp dat aan de orde is niet opgelost had kunnen worden; (b) men moet de leerlingen stimuleren om wiskunde in hun leven buiten school te ontdekken, (c) wiskunde moet leuk zijn – dit aspect kan ontwikkeld worden met wiskunde-spelletjes en door de hang naar fantasie van kinderen uit te buiten; (d) de nadruk moet op het oplossen van problemen liggen – maar dit moet de leerlingen motiveren om wiskunde te begrijpen en hun vaardigheden te ontwikkelen en moet natuurlijk niet als een alternatief hiervoor aangeboden worden; (e) de leerlingen moeten wiskundig leren denken en niet alleen mechanische vaardigheden ontwikkelen, (f) wiskunde

moet als een eenheid aangeboden worden, niet als een aantal gescheiden disciplines (de studie van vierkantsvergelijkingen moet wat algebra bevatten, wat grafieken, wat meetkunde en wat benaderingen en schattingen maken); (g) wiskunde moet beschouwd worden als tijdsbesparing en niet als werkverschaffing – een heel goede mogelijkheid om dit te illustreren is de zakrekenmachine en de intelligente manier waarop men deze kan gebruiken; (h) de leerlingen moeten begrijpen welke rol kansrekening en statistiek spelen bij het vaststellen van intelligent gedrag. In verband met de lengte van dit artikel heb ik geen voorbeelden van al deze principes gegeven, maar de lezer kan er gemakkelijk zelf voorbeelden van geven – en van het tegendeel ervan. Tot dusver hebben we aandacht geschonken aan het basisonderwijs. De principes gelden echter evenzeer voor het voortgezet onderwijs (en nauwelijks minder voor het hoger onderwijs). Voorbeelden van een slechte pedagogische benadering op het niveau van het voortgezet en hoger onderwijs zijn in[1] te vinden. De reden dat we in dit artikel de meeste aandacht aan het basisonderwijs schenken is eenvoudigweg dat de strijd bij voorbaat verloren is als het wiskunde-onderwijs in het basisonderwijs niet verbeterd wordt. We zullen ons probleem nooit oplossen met pogingen om de achterstand in te lopen in het voortgezet onderwijs – we kunnen het hoogstens wat afzwakken.

Wat zijn dan de conclusies voor het volwassenen onderwijs? We denken hier voornamelijk aan diegenen die vroeger slecht in wiskunde waren en die nu gedwongen worden om weer te proberen elementaire wiskunde te leren vanwege de eisen van de arbeidsmarkt of gewoon omdat ze zich beter willen redden in de moderne wereld. Onze avondscholen zitten vol met deze mensen en de toeloop zal alleen maar groter worden. Ons hoger beroepsonderwijs en onze universiteiten zijn bezig om grootscheepse inhaalprogramma's op te zetten en zij zullen merken dat ze hier steeds meer aandacht aan zullen moeten besteden. Een steeds groter aantal studenten dat naar het hoger onderwijs gaat mist de nodige wiskunde-achtergrond en schrijft zich in voor inhaalcursussen. Hun aantal neemt bovendien sterk toe doordat veel studierichtingen – met name de sociale wetenschappen – tegenwoordig van hoofdvakstudenten eisen dat zij tot een bepaald niveau wiskunde hebben gehad. Permanente educatie gaat in steeds grotere mate een rol spelen in het onderwijsaanbod na het voortgezet onderwijs en binnen die permanente educatie zal een enorme vraag naar cursussen wiskunde ontstaan. Wat voor hoop kunnen we bieden dat we dit gigantische probleem kunnen oplossen?

Wij willen het hier alleen hebben over het probleem van het wiskunde-onderwijs aan volwassenen, hoewel wij beseffen dat goede begeleiding voor veel cursisten in het volwassenenonderwijs van essentieel belang is. Eén principe is het allerbelangrijkst: de cursisten moeten als volwassenen behandeld worden. (Natuurlijk moet iedereen die iets leert, ongeacht zijn leeftijd, met respect behandeld worden!) Het is duidelijk dat dit betekent dat het op een volslagen mislukking zal uitlopen als de manier waarop men hen lesgeeft een reprise is van hun vroegere ervaring met het leren (of niet leren) van wiskunde. Het betekent dat lessen die er van uitgaan dat volwassen cursisten een groot en accuraat geheugen hebben waarmee ze feiten en procedures kunnen onthouden die ze nog niet verwerkt en begrepen hebben, nog rampzaliger zullen zijn dan lessen aan kinderen. Het geheugen van volwassenen is lang zo goed niet als dat van kunderen en bovendien wordt het sterk beïnvloed door het onderscheidingsvermogen dat ze in de loop der tijd hebben ontwikkeld. Het betekent dat oneerlijke motivatie averechts werkt.

Is er hoop?

Maar er is hoop! Wanneer men op een vooruitstrevende, eerlijke manier lesgeeft volgens de positieve principes die we al voor het basisonderwijs genoemd hebben, kan men gebrek aan zelfvertrouwen, aanleg en kennis overwinnen en de cursisten zelfvertrouwen, kennis en vaardigheid bijbrengen. Men kan volwassen duidelijk maken dat zij gewend

De strijd is bij voorbaat verloren als het wiskunde-onderwijs in het basisonderwijs niet verbeterd wordt. We zullen ons probleem nooit oplossen met pogingen om de achterstand in te lopen in het voortgezet onderwijs – we kunnen het hoogstens wat afzwakken.

zijn om dingen te doen (zoals vakantieplannen maken, hun wekelijkse uitgaven bijhouden en hun verzekeringszaken regelen) die heel wat ingewikkelder zijn dan zaken waarbij ze vaak de moed verliezen als ze beseffen dat er wiskunde aan te pas komt. We moeten deze mensen goede, nuttige wiskunde leren op een rustige ontspannen manier, zonder een autoritaire houding, zodat ze zich niet bedreigd voelen, niet schrikken van de onbekende symbolen, maar er vertrouwd mee raken en er van overtuigd raken dat zij nu beter in staat zijn om rationele beslissingen te nemen en om zich in onze gecompliceerde wereld te redden. (Deze principes zijn naar wij hopen gerealiseerd in[2].) Dan zal wiskunde geen barrière zijn, maar de sleutel tot een voller leven.
Tenslotte moeten wij nog iets zeggen over de plaats van deze bijdrage op een symposium dat gewijd was aan de toekomst van de wiskunde. We hebben gesproken over de toekomst (en het verleden) van het wiskunde-onderwijs. Zijn er implicaties voor de toekomst van de wiskunde zelf? Laten we volstaan met het geven van een reden waarom het antwoord bevestigend is. Het is essentieel voor het floreren van de wiskunde dat er voldoende plaatsen aan universiteiten zijn voor wiskundigen. Het aantal plaatsen hangt af van het aantal studenten. In de toekomst zullen er, net als nu, grote aantallen studenten zijn, maar zij zullen steeds meer behoefte hebben aan tamelijk elementaire cursussen. Wiskundigen moeten daarom laten zien dat ze het enthousiasme kunnen opbrengen en de capaciteiten hebben om deze studenten les te geven. Daarvoor is het nodig dat zij de motivatie van deze studenten begrijpen en de oorzaak van hun moeilijkheden kennen. De traditionele opleiding van wiskundigen hield hier volstrekt geen rekening mee. Zo is niet aan de conclusie te ontkomen dat het voor de toekomst van de wiskunde en de wiskundigen van vitaal belang is dat aan de traditionele opleiding een component wordt toegevoegd waardoor toekomstige docenten zorg voor en vaardigheid wordt bijgebracht in het geven van tamelijk elementaire wiskunde aan jongelui die een voorkeur hebben voor andere vakken dan wiskunde. Misschien is zo'n heroriëntatie niet het grootste probleem waar we in het huidige wiskunde-onderwijs mee te maken hebben, maar het is, zoals wij wiskundigen zeggen, hoogst ontriviaal!

Literatuur

1 Peter Hilton, 'Math Anxiety: Some Suggested Causes and Cures.' *Two-Year College Mathematics Journal* (1980) 174-188; 246-251.
2 Peter Hilton and Jean Pedersen. *Fear no More: An Adult Approach to Mathematics*, Vol. 1, Addison-Wesley, 1981.
3 Morris Kline. *Why the Professor Can't Teach.* St. Martin's Press, 1977.
4 Stanley Kogelman and Joseph Warren. *Mind Over Math.* Dial Press, 1978.
5 Sheila Tobias. *Overcoming Math Anxiety. Norton, 1978.*

* Uit: Mathematics Tomorrow (edited by Lynn Arthur Steen), Springer-Verlag New York Inc. Oorspronkelijke titel: Avoiding Math Avoidance. Vertaling Drs. M. Werner-Rietbergen.

Over de auteur:

Peter J. Hilton is aan de Louis D. Beaumont University Professor aan het Case Institute of Technology en als 'Fellow' verbonden aan het Battelle Seminars and Studies Program. Hij behaalde zijn M.A. aan de Universiteit van Oxford in 1947 en een Ph.D. zowel aan de Universiteit van Oxford in 1950 als aan de Universiteit van Cambridge in 1952. Hij is als docent verbonden geweest aan de universiteiten van Cambridge, Manchester en Birmingham, aan Cornell University, ETH (Zurich), New York University en de University of Washington. Hilton is secretaris van de International Commission on Mathematical Instruction en hij is voorzitter geweest van de United States National Research Council Committee on Applied Mathematics Training. Zijn belangstelling gaat voornamelijk uit naar onderzoek in de algebraïsche topologie, homologische algebra en het wiskunde-onderwijs. Over deze onderwerpen heeft hij 15 boeken en meer dan 200 artikelen geschreven, waarvan sommige samen met collega's.

Eindexamens vwo en havo, eerste tijdvak 1987

Inleiding

In dit artikel vindt men allerlei wetenswaardigheden omtrent deze examens. Eerst komen de resultaten aan de orde aan de hand van de steekproefgegevens die het CITO verzameld heeft (H. N. Schuring) vervolgens de vaststelling van de cesuur door de CEVO met behulp van deze steekproefgegevens (drs. W. Kleyne) en tenslotte de meningen van de docenten in een verslag van de regionale besprekingen van deze examens, georganiseerd door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (drs. J. W. Maassen).

De resultaten van de examens

Vooraf

Het geven van een overzicht van de resultaten van deze examens is slechts mogelijk dank zij de medewerking van de betrokken docenten die de gegevens van vijf kandidaten van hun school tijdig hebben opgestuurd.

Uitleg over de verstrekte cijfers

In de gegevens van de steekproeven komen enige uitdrukkingen en cijfers voor, waarvan de betekenis hieronder uitgelegd wordt:

– *de p′-waarde*

De gemiddelde score van een opgave-onderdeel, uitgedrukt in procenten van het maximaal te behalen puntenaantal voor dat onderdeel, noemt men de p′-waarde van dat onderdeel.

– *de RIT*

De RIT is een maat voor de correlatie tussen een vraag en de totale toets. De RIT drukt de discriminerende waarde van een vraag uit: $-1 \leqq \text{RIT} \leqq 1$. Een hoge RIT geeft aan dat de vraag goed discrimineert, d.w.z. 'goede' kandidaten maken de betrokken vraag goed en 'slechte' kandidaten maken de betrokken vraag slecht. Indien $\text{RIT} = -1$ is er sprake van een volledige negatieve correlatie en hebben alle 'goede' kandidaten de vraag fout en de 'slechte' kandidaten de vraag goed opgelost.

– *de RIR*

De RIR is een analoge maat voor de correlatie tussen een vraag en de rest van de toets, waarin dit vraag-onderdeel niet meegerekend wordt.
Het zal duidelijk zijn dat de RIR altijd lager is dan de RIT van een vraag.

Vwo wiskunde A

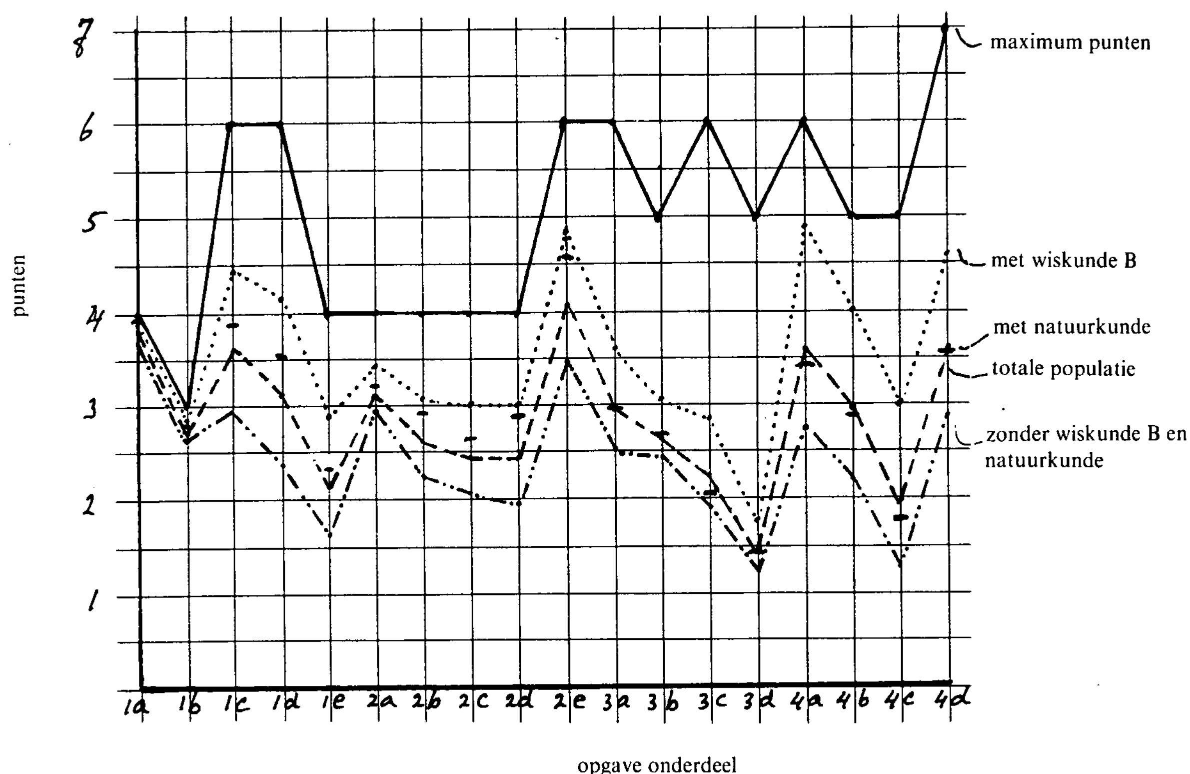
Op grond van de resultaten van 2316 kandidaten is het volgende overzicht tot stand gekomen.

onderdeel	maximale score	gemiddelde score	p′-waarde	RIT	RIR
1a	4	3,9	96	0,19	0,16
1b	3	2,7	91	0,23	0,20
1c	6	3,6	60	0,68	0,61
1d	6	3,2	53	0,67	0,59
1e	4	2,2	55	0,62	0,55
2a	4	3,2	79	0,48	0,43
2b	4	2,6	66	0,54	0,47
2c	4	2,4	61	0,50	0,42
2d	4	2,4	60	0,54	0,47
2e	6	4,1	68	0,57	0,46
3a	6	3,0	49	0,47	0,37
3b	5	2,7	54	0,53	0,45
3c	6	2,3	38	0,56	0,48
3d	5	1,5	29	0,47	0,37
4a	6	3,6	60	0,59	0,52
4b	5	3,0	60	0,59	0,52
4c	5	2,0	39	0,62	0,55
4d	7	3,6	51	0,59	0,48

De gemiddelde score, inclusief de 10 punten vooraf, is 61,8, met een standaarddeviatie van 17,1.
De onderdelen 3c, 3d en 4c hebben een lage score ($p' < 40\%$), waarbij meer dan 50% van de kandidaten op de onderdelen 3d en 4c ten hoogste 1 punt

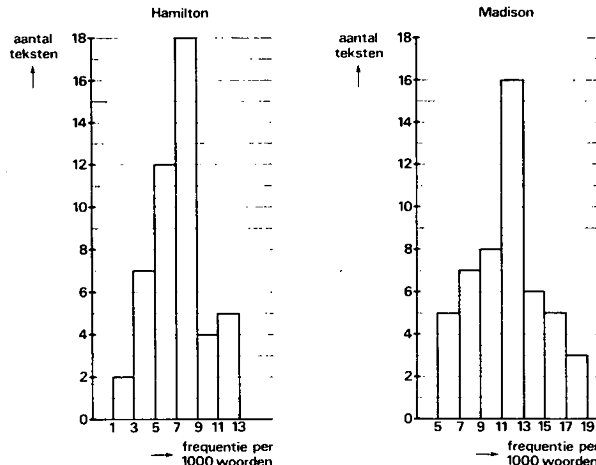
scoorden. In 3.d was het niet zonder meer uit de tekst op te maken dat de tekentoets gebruikt kon worden, het is echter niet te meten of de kandidaten hierdoor in verwarring gebracht zijn. In 4c gaf het berekenen van de minimale marginale kosten veel problemen, speciaal voor de kandidaten die geen wiskunde B in hun pakket hadden.
Deze laatste uitspraak is mogelijk omdat van 2015 kandidaten uit de steekproef gegevens bekend zijn over hun vakkenpakket. 791 van deze kandidaten hebben ook wiskunde B examen gedaan, 158 geen wiskunde B maar wel natuurkunde en 1066 geen wiskunde B en ook geen natuurkunde.
De scoreresultaten per opgaveonderdeel van deze deelpopulaties zijn weergegeven in de volgende figuur, tesamen met de gemiddelde score van de totale steekproef. De score van de kleine deelpopulatie met natuurkunde zonder wiskunde B is aangegeven met een horizontaal streepje, zonder verbindingen.

De gemiddelde scores van deze drie deelpopulaties zijn achtereenvolgens: 73,4; 63,5 en 53,3.
Deze gegevens waren ook beschikbaar tijdens de vergadering van de CEVO-vaksectie wiskunde havo/vwo voor de vaststelling van de cesuur.
Dit is erg belangrijk want gebleken is dat kandidaten die geen ondersteuning hadden van wiskunde B en/of natuurkunde aanzienlijk lager scoorden dan de anderen, terwijl toch speciaal voor deze groep het curriculum van wiskunde A geschreven is.
Een jaar geleden, toen de opgaven door de CEVO-vaksectie vastgesteld waren, hebben de leden van de Advies Commissie van Docenten (ACD) en de leden van de CEVO-vaksectie een schatting gemaakt van de moeilijkheidsgraad van dit examen. De gemiddelde schatting van de gemiddelde score was 60,0, die weinig afwijkt van de werkelijke gemiddelde score van 61,8.



Score resultaten per onderdeel eindexamen wiskunde A.

3. In 1787 en 1788 schreven Alexander Hamilton en James Madison de zogenaamde *The Federalist* papers om de inwoners van New York te overreden de Constitutie te ratificeren. Beide schrijvers ondertekenden met „Publius".
Van 48 van deze teksten is bekend dat zij van Hamilton zijn en van 50 dat zij van Madison zijn. Om ook van de overige teksten de auteur te achterhalen, heeft men van diverse woorden geteld hoe vaak ze in een tekst van Hamilton voorkomen en hoe vaak in een tekst van Madison. Voor elk van die teksten heeft men daarna de frequentie per 1000 woorden berekend.
Dit heeft men onder andere gedaan voor het woordje „*by*".
Het resultaat is weergegeven in onderstaande histogrammen.



a. Verwerk deze gegevens, zowel voor Hamilton als voor Madison, op normaal-waarschijnlijkheidspapier.
Neem aan dat men mag concluderen dat de frequenties normaal verdeeld zijn.
Geef dan in beide gevallen het gemiddelde en de standaarddeviatie.

Van een ander woord weet men dat dit bij Hamilton per 1000 woorden voorkomt met een gemiddelde van 17,2 en een standaarddeviatie van 4,1. Men mag weer aannemen dat de frequenties normaal verdeeld zijn.
Voor Madison zijn deze gegevens niet bekend.
Bij een gegeven tekst vindt men onder de eerste 1000 woorden dit woord 24 maal.

b. Onderzoek of men bij een significantieniveau* van 5% voldoende reden heeft te twijfelen aan het auteurschap van Hamilton.

Om een grotere nauwkeurigheid te bereiken, kijkt men nu naar de eerste 4000 woorden van die tekst. Het gezochte woord blijkt hierbij 86 maal voor te komen.

c. Onderzoek of men nu bij een significantieniveau van 5% voldoende reden heeft te twijfelen aan het auteurschap van Hamilton.

Een andere tekst heeft men op 20 woorden onderzocht. Op grond daarvan heeft men 15 maal gekozen voor Hamilton als auteur en 5 maal voor Madison als auteur.

d. Onderzoek of men hieruit met een significantieniveau van $2\frac{1}{2}$% mag besluiten dat Hamilton de schrijver was.

* significantieniveau = onbetrouwbaarheidsdrempel

Eindexamen wiskunde A eerste tijdvak 1987, opgave 3.

Vwo wiskunde B

Op grond van de resultaten van 2142 kandidaten is het volgende overzicht tot stand gekomen.

onderdeel	maximale score	gemiddelde score	p'-waarde	RIT	RIR
1a	8	6,7	84	0,53	0,45
1b	7	5,3	76	0,56	0,47
1c	7	3,1	44	0,59	0,47
2a	8	6,3	79	0,61	0,52
2b	7	6,3	90	0,52	0,44
2c	8	5,4	67	0,67	0,56
3a	7	6,2	89	0,51	0,42
3b	8	4,1	51	0,65	0,54
3c	8	5,6	70	0,64	0,53
4a	8	4,4	54	0,46	0,30
4b	8	4,0	50	0,54	0,36
4c	6	2,2	36	0,55	0,43

De gemiddelde score, inclusief de 10 punten vooraf, is 69,4, met een standaarddeviatie van 15,5.

Het onderdeel 4c heeft een lage score ($p' < 40\%$), terwijl meer dan 50% van de kandidaten hierop ten hoogste 1 punt scoorden. Het bewijs dat de hoekpunten van de piramide op een bol liggen en het berekenen van de straal van die bol leverde voor hen moeilijkheden op. Wellicht zijn sommige kandidaten hier niet aan toe gekomen, omdat dit onderdeel het laatste was van het examen. Het gehele ruimtemeetkunde vraagstuk heeft, vergeleken met de analyse, betrekkelijk laag gescoord.

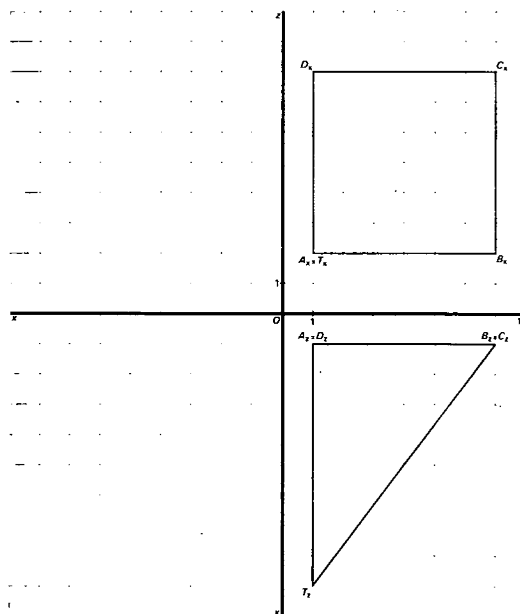
Voordat de ACD met de constructie van de opgaven begon, vroeg de CEVO-vaksectie de voorstellen voor de analyse-vraagstukken niet te moeilijk te maken, om de kandidaten de gelegenheid te geven de nodige tijd te besteden aan de ruimtemeetkunde, die dit jaar voor het eerst landelijk in het examen voorkomt. De landelijke resultaten van het gehele examen overtroffen de verwachtingen, wat blijkt uit de gemiddelde schatting van de gemiddelde score: 62,4 vergeleken met de werkelijke gemiddelde score van 69,4.

4. Van de piramide $T.ABCD$ zijn hieronder de loodrechte projecties op het Oxy-vlak en het Oyz-vlak getekend.
Voor elk punt P is P_x de projectie op het Oyz-vlak, P_y de projectie op het Oxz-vlak en P_z de projectie op het Oxy-vlak.

a. V is het vlak door A dat loodrecht staat op de ribbe TB.
Neem onderstaande figuur over en teken daarin de loodrechte projecties op de drie coördinaatvlakken van de doorsnede van V en de piramide.

b. Bereken in graden nauwkeurig de hoek van de vlakken TBC en TCD.

c. Bewijs dat de punten A, B, C, D en T op één bol liggen.
Bereken de straal van deze bol.



Eindexamen wiskunde B eerste tijdvak 1987, opgave 4.

Vwo wiskunde I

De eerste drie opgaven van dit bezemexamen waren gelijk aan die van het wiskunde B examen, terwijl de laatste opgave (statistiek) de ruimtemeetkunde van wiskunde B verving. Uit een steekproef van 1044 kandidaten blijken de p'-waarden van de eerste drie opgaven hetzelfde beeld te vertonen als die voor wiskunde B, maar gemiddeld 9% lager te liggen. De p'-waarden van de statistiekopgave zijn respectievelijk 34, 44 en 66. De gemiddelde score bedroeg 63,4, met een standaarddeviatie van 15,2. De gemiddelde schatting van de CEVO van de gemiddelde score was 61,3, die weinig afwijkt van de werkelijke gemiddelde score.

Vwo wiskunde II

De steekproefgegevens van dit bezemexamen zijn nauwelijks representatief te noemen, omdat de resultaten van slechts 174 kandidaten verwerkt konden worden.
De opgave-onderdelen 1b, 1c en 3c scoorden laag ($p' < 40\%$).
De gemiddelde score was ook laag: 50,1, met een standaarddeviatie van 12,6.

Havo wiskunde

Op grond van de resultaten van 2424 kandidaten is het volgende overzicht tot stand gekomen.

onderdeel	maximale score	gemiddelde score	p'-waarde	RIT	RIR
1a	6	5,2	87	0,50	0,16
1b	6	4,1	68	0,55	0,44
1c	6	1,3	22	0,53	0,45
2a	6	4,2	70	0,60	0,51
2b	6	4,1	68	0,63	0,53
2c	6	3,4	56	0,63	0,53
3a	6	4,9	82	0,52	0,44
3b	6	3,0	49	0,65	0,55
3c	6	0,7	11	0,37	0,29
4a	7	4,0	57	0,64	0,54
4b	5	0,4	7	0,38	0,32
4c	6	1,0	17	0,57	0,49
5a	5	3,0	59	0,52	0,41
5b	6	4,1	69	0,52	0,41
5c	7	4,8	69	0,50	0,37

De gemiddelde score, inclusief de 10 punten vooraf, is 58,0, met een standaarddeviatie van 15,4.
De onderdelen 1c, 3c, 4b, en 4c hebben een lage score ($p' < 40\%$), terwijl meer dan 50% van de kandidaten op deze onderdelen ten hoogste 1 punt scoorden. In 1c moest de vergelijking van een parabool die de grafiek van een derdegraads functie in een gegeven punt loodrecht snijdt, gevonden worden.
In 3c zou naar het oordeel van sommige docenten het resultaat beter geweest zijn, indien de verzameling beschreven was met een $\vee$-teken i.p.v. een maalteken. Dit betekent dat de kandidaten zich niet gerealiseerd hebben dat een produkt nul is als één van de factoren nul is.
Het is langzamerhand gebruikelijk dat de gonioopgaven slecht gemaakt wordt, zelfs als de goniometrische functies erg simpel zijn. Deze opgave 4 vormt hierop geen uitzondering.
Ondanks deze onderdelen met lage resultaten hebben de ACD- en CEVO-leden vorig jaar de gemiddelde score vrij nauwkeurig kunnen schatten: gemiddeld 58,6 wat weinig afwijkt van de werkelijke waarde van 58,0.

De vaststelling van de cesuur

Evenals bij bijna alle vakken, werken wij ook bij de wiskunde volgens de procedure van de zogenaamde versnelde correctie.
Kort samengevat houdt dit het volgende in:
Tegelijk met de examenopgaven worden ook de correctie-voorschriften (CV) naar de scholen gezonden. Nadat de betreffende examenzittingen zijn afgelopen, mogen de enveloppen met de CV worden geopend. De examinatoren dienen zich bij het nakijken van het examenwerk te houden aan de bindende normen die in deze CV zijn verwoord.
De scholen zenden de resultaten van de eerste vijf kandidaten naar het CITO dat deze gegevens verwerkt.
Het CITO brengt deze gegevens in in de vaksectie wiskunde van de CEVO. Ook de opmerkingen gemaakt door docenten tijdens de examenbesprekingen worden aan de CEVO-vaksectie doorgegeven. Gewapend met deze gegevens plus de overige opmerkingen die op enigerlei wijze ter kennis zijn gebracht van de CEVO, vergadert de CEVO-vak-

sectie wiskunde samen met de CITO-medewerker, ter vaststelling van de cesuur.
Op de 100-punten schaal, zoals bij wiskunde vwo-havo gebruikelijk is, ligt normaal de cesuur bij de score 54/55.
In bijzondere gevallen, indien daartoe aanleiding bestaat, kan de cesuur verschoven worden, echter, uitsluitend ten gunste van de kandidaten. De ter beschikking staande gegevens gaven voor het 1e tijdvak 1987 voor havo wiskunde en vwo-wiskunde I en B geen aanleiding voor een cesuurverschuiving. Dat lag anders voor vwo-wiskunde A en II. Met name ten aanzien van wiskunde A waren de opmerkingen over de diverse vraagstukken, waarbij speciaal het statistiek vraagstuk genoemd dient te worden, aanleiding om de cesuur met 5 punten te verschuiven, naar de score 49/50. Opmerkenswaard zijn de resultaten van enige deel-populaties. Zie het onderstaande overzicht.
Voor wiskunde II deed zich een bijzondere omstandigheid voor. Bij de CEVO waren geen opmerkingen over dit werk binnengekomen. Het werk lijkt in alle opzichten te voldoen aan de eisen die ook de afgelopen jaren aan wiskunde II waren gesteld. Toch zou er bij een cesuur van 54/55 een percentage onvoldoendes ontstaan van 66.

Een situatie die zich in de afgelopen 10 jaren niet heeft voorgedaan. Over de redenen is waarschijnlijk weinig met zekerheid te zeggen. Wel is het natuurlijk zo dat het niet de sterkste kandidaten waren die aan dit examen deelnamen (immers, vorig jaar gezakt!) En misschien is het ook wel zo dat er maar weinig lessen voor deze kandidaten het afgelopen schooljaar beschikbaar waren. Kort en goed, de CEVO wilde juist voor deze laatste 'dagschoollichting' enige clementie betrachten door de cesuur te leggen bij 49/50.
Overzicht van de resultaten wiskunde havo-vwo op grond van de steekproef van 5 kandidaten per school.

	havo	wi I	wi B	wi A	wi II
% onvoldoende	37	26	15	25	49
cesuur	54/55	54/55	54/55	49/50	49/50
gemiddeld cijfer	5,8	6,3	6,9	6,6	5,5

Resultaten van deelpopulaties van kandidaten wi A.

	wi A[1])	A + B[2])	A + N[3])	A[4])
% onvoldoende	25	7	12	41
cesuur	49/50	49/50	49/50	49/50
gemiddeld cijfer	6,6	7,6	6,7	5,8

1) de gehele populatie kandidaten die examen deden in wi A.
2) de deelpopulatie kandidaten wi A die tevens examen deden in wi B.
3) de deelpopulatie kandidaten wi A die geen examen deden in wi B, maar wel in natuurkunde.
4) de deelpopulatie kandidaten wi A die noch examen deden in wi B noch in natuurkunde.

Regionale besprekingen wiskunde vwo en havo 1987

Dit jaar werden in 10 plaatsen regionale besprekingen over het examen wiskunde A gehouden. Het aantal aanwezigen, in totaal circa 350, varieerde van 14 tot 71 per bijeenkomst.
Over het examen wiskunde B en wiskunde havo werden dit jaar in 7 plaatsen bijeenkomsten gehouden. Voor wiskunde B varieerde het aantal aanwezigen, in totaal circa 125, van 5 tot 43 per bijeenkomst en voor wiskunde havo varieerde het aantal aanwezigen, in totaal circa 115, van 2 tot 32 per bijeenkomst.
Op alle bijeenkomsten werden aan het begin enige vragen over het examen gesteld. Dit leidde tot de volgende resultaten:

Bij de besprekingen kwamen de volgende zaken aan de orde:

wiskunde A:
- de opstellers van de examens moeten een grotere zorgvuldigheid bij de formulering betrachten,
- er moeten duidelijker opdrachten gegeven worden; dus niet 'geef de resultaten weer in een graaf', maar 'in een ..-punts graaf' en niet 'stel een twee bij twee matrix M op', maar een 'overgangsmatrix',
- in het correctievoorschrift moeten veel voorkomende fouten worden opgenomen,
- het examen zou moeten beginnen met 'geef bij elk antwoord een voldoende argumentatie'. Hierdoor

	wiskunde A-vwo	wiskunde B-vwo	wiskunde havo
In vergelijking tot vorige jaren is het niveau van het CSE 1987			
lager		100%	5%
gelijk	70%		75%
hoger	30%		20%
De spreiding over de stof is			
slecht	20%	5%	
voldoende	65%	45%	40%
goed	15%	50%	60%
Het aantal routinevragen is			
te klein	15%		10%
goed	80%	15%	90%
te groot	5%	85%	
Het aantal originele opgaven is			
te klein	25%	85%	5%
goed	75%	15%	70%
te groot			25%
Het correctievoorschrift is			
te gedetailleerd			
goed	60%	100%	100%
te weinig gedetailleerd	40%		
De poging om de opgaven naar opklimmende moeilijkheidsgraad te rangschikken is			
niet gelukt	75%	30%	60%
redelijk gelukt	25%	55%	35%
goed gelukt		15%	5%
De redactie van de opgaven is in het algemeen			
te beknopt	30%	5%	2%
goed	65%	95%	86%
te uitvoerig	5%		12%
De beschikbare tijd is			
te krap	30%	5%	30%
goed	70%	95%	70%
te veel			

kan voorkomen worden dat men op grond van het 'licht het antwoord toe' in opgave 1b, enkel het antwoord van vraagstuk 2c zou moeten goed rekenen.

- men ziet graag richtlijnen over de betekenis van opdrachten zoals: 'toon aan', 'bepaal', 'leg uit' en 'verwerk deze gegevens',
- er moeten afspraken komen over de vermelding van de eenheden (zoals guldens) in de antwoorden.
- het is wenselijk dat de scholen die voor eerste en tweede correctie gekoppeld worden binnen dezelfde regio liggen,
- men vraagt om bijzondere papiersoorten zoals normaal waarschijnlijkheidspapier en logaritmisch papier, bij het examen mee te zenden,
- als positieve opmerking werd in een verslag gemeld: "Ten opzichte van het vorige wiskunde A-examen vond men dit werk wel betere wiskunde A-vragen bevatten".

Commentaar op de opgaven:

Opgave 1: (zie blz. 16)
Er was grote kritiek op het veranderen van de volgorde aardappelen, erwten, graan, in de tabel van de oogstperiodes.
Er waren bezwaren tegen het stapelingskarakter van dit vraagstuk. Vanuit de praktijk werd gesignaleerd dat de gegevens niet in overeenstemming waren met de werkelijkheid.

Opgave 2:
Men vond dit een slordig en onvolledig vraagstuk, waarbij de tekst te veel onduidelijkheden opriep.
De opdrachten hadden scherper geformuleerd moeten worden zodat men bijvoorbeeld weet aan welke eisen de graaf moet voldoen.
Door niet te vermelden dat er gegeneraliseerd mag worden, levert het beantwoorden van de vragen problemen.
Daar de stabiele samenstelling alleen per 4 uren geldt, is het antwoord 48 uren in vraag e beter dan het antwoord 45 uren.

Opgave 3: (zie blz. 11)
Men heeft hier kritiek op inhoud en redactie:
- in vraag a wordt tweemaal hetzelfde gevraagd,
- er zijn teveel toetsen in dit vraagstuk,
- er had duidelijker naar een tweezijdige toets gevraagd moeten worden,
- men vraagt richtlijnen (via een circulaire) over continuïteitscorrectie,
- vooral vraag d vond men veel te moeilijk.

Opgave 4:
Ook bij dit vraagstuk was er kritiek op inhoud en redactie.
Dit vraagstuk was het gemakkelijkste vraagstuk voor de kandidaten met ook wiskunde B in het pakket en het moeilijkste vraagstuk voor de kandidaten zonder wiskunde B in het pakket.

1. Een boer heeft 22 ha bouwland.
Het komend jaar zullen hierop aardappelen, erwten en graan geteeld worden.
De te verwachten opbrengst is 60 ton aardappelen per ha, 40 ton erwten per ha, 50 ton graan per ha.
De te verwachten winst per ton is voor aardappelen f 70,–, voor erwten f 75,– en voor graan f 90,–.

a. De boer wil 6,5 ha voor aardappelteelt bestemmen, 7,1 ha voor erwtenteelt en 8,4 ha voor graanbouw.
Bereken de winst die in totaal te verwachten is.

De oogsttijden voor de diverse gewassen vallen na elkaar. Elk gewas moet in een periode van 5 dagen geoogst worden, waarbij 8 uren per dag wordt gewerkt.
Hierbij gelden de volgende voorwaarden:

gewas	oogst-periode	benodigd aantal arbeidsuren per ha	beschikbaar aantal oogsters
graan	I	10	3
erwten	II	15	2
aardappelen	III	12	2

b. Is de keuze die de boer in opgave a. gedaan heeft onder deze voorwaarden uitvoerbaar?
Licht het antwoord toe.

Stel dat x ha voor aardappelteelt bestemd wordt en y ha voor erwtenteelt, terwijl de rest van het land wordt gebruikt voor graanbouw.

c. Geef de beperkende voorwaarden voor x en y.
Teken in een rechthoekig assenstelsel Oxy het gebied waarin aan de gestelde voorwaarden wordt voldaan.

d. Bij welke waarden van x en y is de te verwachten winst maximaal?
Bereken deze te verwachten winst.

e. In welke periode hebben de oogsters in de situatie van onderdeel d. nog arbeidsuren over voor andere activiteiten?
Bereken dit aantal arbeidsuren.

Eindexamen wiskunde A eerste tijdvak 1987, opgave 1.

Het correctievoorschrift was ook te wiskunde B-achtig.
Vooral vraag a, maar ook de vragen b en c vond men te wiskunde B-achtig. Bij vraag d had men graag een antwoordblad bijgeleverd gezien.

Wiskunde B:

- Het is wenselijk dat de examinator niet slechts de fouten moet aangeven maar ook de onderdelen die goed zijn of goede elementen bevatten, moet aangeven.
- men vraagt om meer informatie over de aard en de omvang van vectormeetkunde binnen de ruimtemeetkunde.
- volgens sommigen kan het onderwerp 'differentiaalvergelijkingen' in de toekomst wel weer aan het programma worden toegevoegd. Men is echter bevreesd dat het onderwerp 'kegels, cilinders en ruimtekrommen' het programma zal overladen.
- naar aanleiding van scoringsregel 2.6 vragen sommigen zich af hoe men kan constateren dat een antwoord voldoende is (bijvoorbeeld de horizontale asymptoot $y = -1$ in opgave 2b).
- daar voor wiskunde B volgens de 'groene circulaire' geen tabellenboekjes zijn toegestaan en wiskunde I in deze circulaire niet voorkwam, waren voor de kandidaten voor wiskunde I niet altijd tabellenboekjes aanwezig.

Opmerkingen naar aanleiding van de opgaven:

Opgave 1:
Sommigen geven er de voorkeur aan de hoofdletters F en G te reserveren voor primitieven van functies. Grafieken kunnen dan genoteerd worden met K_f en K_g.

Opgave 2:
Vragen over krommen behoeven niet tot 3 onderdelen beperkt te blijven. Sommigen verkiezen meer onderdelen of – indien dit niet mag – meer vragen per onderdeel. Er wordt om meer eenheid in het onderzoeken van krommen gevraagd.
Er wordt om een onderscheid tussen 'schets' en 'teken' gevraagd, waarbij de opdracht 'schets' moet inhouden dat de tekening op basis van de op dat moment verkregen gegevens wordt vervaardigd.
Opgave 2b wordt als erg gemakkelijk aangemerkt.

Opgave 3:
Sommigen vinden 3b, door de ongebruikelijke eliminatie, lastiger dan 3c.

Opgave 4:
Men vraagt in de toekomst een werkblad voor tekeningen toe te voegen. Opgemerkt wordt dat in de projectie in het Oyz-vlak de lijn T_xC_x in de tekening had moeten staan.
Men vraagt om definities van 'teken' en 'construeer'. Vereist 'construeer' dat alleen van passer en liniaal gebruik wordt gemaakt?
Ook worden afspraken gevraagd over stippelen van niet-zichtbare lijnen in projecties en eventueel arceren van projecties van doorsneden.
In één van de groepen meent men dat de kwaliteit van opgave 4 niet in verhouding staat tot de gespendeerde tijd en dat het vraagstuk te veel vectormeetkunde bevat.
In opgave 4b hadden sommigen liever 'benader' dan 'bereken' gezien.

Wiskunde havo:

- wat moet er gebeuren met fouten die leerlingen maken in onderdelen die volgens de normen niet gehonoreerd worden of die niets te maken hebben met de uitvoering van de opdracht?
- een meetkundige oplossing van een vraagstuk moet worden toegejuicht, maar er moeten wel afspraken gemaakt worden over de hierbij vereiste omvang van de toelichting.
- er wordt gevraagd of functies van het type $f\colon x \rightarrow a \sin x + b \cos x + c$ nog tot het examenprogramma behoren en of er opgaven hierover in het centraal schriftelijk examen kunnen worden verwacht.
- het examen wiskunde lag dit jaar, in verband met correctie, te laat in de examenperiode.
- men vraagt zich af wat het CITO met de gegevens van de versnelde correctie doet. Wordt ook naar deelscores gekeken en worden hieraan consequenties verbonden?

Opmerkingen naar aanleiding van de opgaven:

Opgave 1:
Voor opgave 1b zag men graag een andere formulering. Het combineren van een functievoorschrift en een vectorvoorstelling leidde bij een aantal leerlingen tot slechte resultaten.
Sommigen vonden onderdeel 1c een vwo-opgave.

Opgave 2:
Men waardeerde het dat ook voor een meetkundige oplossing gekozen kon worden. Sommigen vroegen daarom een grotere tekening in de opgave.

Opgave 3:
In opgave 3b had men graag gelezen 'Bereken in gehele graden nauwkeurig...'.
De notatie in onderdeel 3c leverde nogal wat kritiek op.

Opgave 4:
Sommigen vinden onderdeel 4b te moeilijk voor havo, anderen juist onderdeel 4c. Sommigen vinden de verhouding 2 punten voor de grafiek en 1 punt voor de toelichting onjuist.

Opgave 5:
Er is waardering voor de context van dit vraagstuk, maar ook blijkt de hoeveelheid tekst een struikelblok te zijn voor leerlingen met een slechte taalbeheersing (bijvoorbeeld leerlingen voor wie Nederlands de tweede taal is).
Het vragen naar $\binom{5}{2}$ wordt als 'niet aardig' aangemerkt.
Het geven van 1 punt voor de factor 10 is te weinig.

Boekbespreking

Het CEDIWI

In november 1981 is opgericht het Centrum voor Didactiek van de Wiskunde (CEDIWI). Dit Centrum is ondergebracht in het Departement Wiskunde van de K.U. Leuven. Doel is het in groepen werken aan problemen die betrekking hebben op bepaalde onderdelen van de didactiek van de wiskunde. Momenteel zijn twee topics in onderzoek:

a de meetkunde in het secundair onderwijs
b de rol van de zakrekenmachine en de microcomputer in het onderwijs.

Het CEDIWI bestaat uit een kern van werkende leden. Deze zullen de resultaten van hun werk geregeld publiceren in de vorm van een serie monografieën, getiteld CONTINUUM. Wie nadere inlichtingen wenst kan bij mij (P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth, tel. 085-33 38 07) een folder aanvragen.

Van Continuüm zijn de eerste twee deeltjes verschenen.

Nr. 1 *Aanzet van het meetkundeonderwijs in het secundair onderwijs*, Acco, Leuven-Amersfoort, 1985, 44 blz., 120 BF/*f* 7,50.

De inhoud bestaat uit een viertal artikelen:

1 Jan De Gelas, Waarom ruimtemeetkunde, verzamelingentaal, axioma's?
2 Lou de Causmaeker, Meetkundige begrippen mathematiseren en symboliseren
3 Inge Verbruggen, Invoer van een stel axioma's voor de (affiene) ruimtemeetkunde
4 Alfred Warrinnier, Bewijzen in de meetkunde

In het voorwoord wijst Warrinnier erop dat de prachtige theoretische opbouw van Papy zeer omvangrijk en daardoor te tijdrovend is. Te weinig plaats blijft er over voor creatieve didactiek.

Jan De Gelas breekt een lans voor het starten met ruimtemeetkunde op aanschouwelijke basis. Zo wordt een schakel gelegd tussen lager en voortgezet onderwijs. 'Een twaalfjarige is stilaan in staat logische afleidingen te maken. Hij wordt kritischer, begint vragen te stellen naar het waarom, vooral wanneer zijn oplossing fout is. Hierdoor dringt de noodzaak aan axiomatiseren zich op. De grondbegrippen en axioma's moeten echter aanknopen bij de ervaringen van de leerlingen.' (p. 10)

Lou de Causmaeker. De leerling kent de bouwstenen van de meetkunde vanuit zijn concrete wereld. Taak van de wiskundeleraar is deze begrippen te mathematiseren, vertrekkend vanuit het concrete. Tevens moeten de leerlingen het verschil leren zien dat bestaat tussen de concreet-fysische begrippen en de mathematische. Het mathematische begrip is ontdaan van alle 'wereldse onzuiverheden', het is eindprodukt van een vervolmakingsproces.

Inge Verbruggen licht aan een voorbeeld toe hoe axioma's vanuit de belevenis wereld tot stand kunnen komen. Ze kiest hiervoor het axioma: door drie niet collineaire punten is een plat vlak bepaald.

Alfred Warrinnier. Waarom bewijzen? 'Het is vanzelfsprekend dat een van de voornaamste doeleinden van het wiskundeonderwijs erin bestaat de leerling gestreng te leren redeneren.' (p. 29) Als voorbeeld van een dergelijke redenering kiest hij het bewijs van de transitiviteit van evenwijdigheid van rechten in de ruimte.

Interessant is in dit deeltje dat men een inzicht krijgt in de didactische achtergronden van de axiomatische opbouw van de meetkunde in Vlaanderen.

Nr 2 *Informatica in het secundair onderwijs*, Acco, Leuven-Amersfoort, 1985, 43 blz., 120 BF, *f* 7,50.

Weer vier artikelen:

1 Dirk Janssens, Informatica in het S.O.: het standpunt van het CEDIWI
2 Roger Bollens, Niveau en doelstellingen van het informatica-onderwijs
3 Inge Verbruggen, Het begrip 'algoritme' in de klassepraktijk
4 Alfred Warrinnier, De rol van de volledige inductie in de uitbouw van algoritmen

Dirk Janssens waarschuwt ervoor niet te snel te beginnen met het aanleren van een computertaal en evenmin met het hanteren van de computer. Eerst dient men het wezenlijke te begrijpen waar het in de informatica om gaat en dat is het algoritmisch denken. Deze denkvorm kan het beste vanuit de wiskunde bestudeerd worden.

Bollens zet de problemen aangaande informatica kort en duidelijk op een rijtje.

Inge Verbruggen haakt in op het probleem van het algoritmisch denken. Ze onderzoekt de structuur van een algoritme en komt tot de definitie: een algoritme is een eindige combinatie van sequenties, selecties en iteraties. Ze zet uiteen hoe men de leerlingen dit inzicht op levendige en didactisch verantwoorde manier kan bijbrengen.

Alfred Warrinnier belicht het wezenlijke van een stroomschema met behulp van volledige inductie.

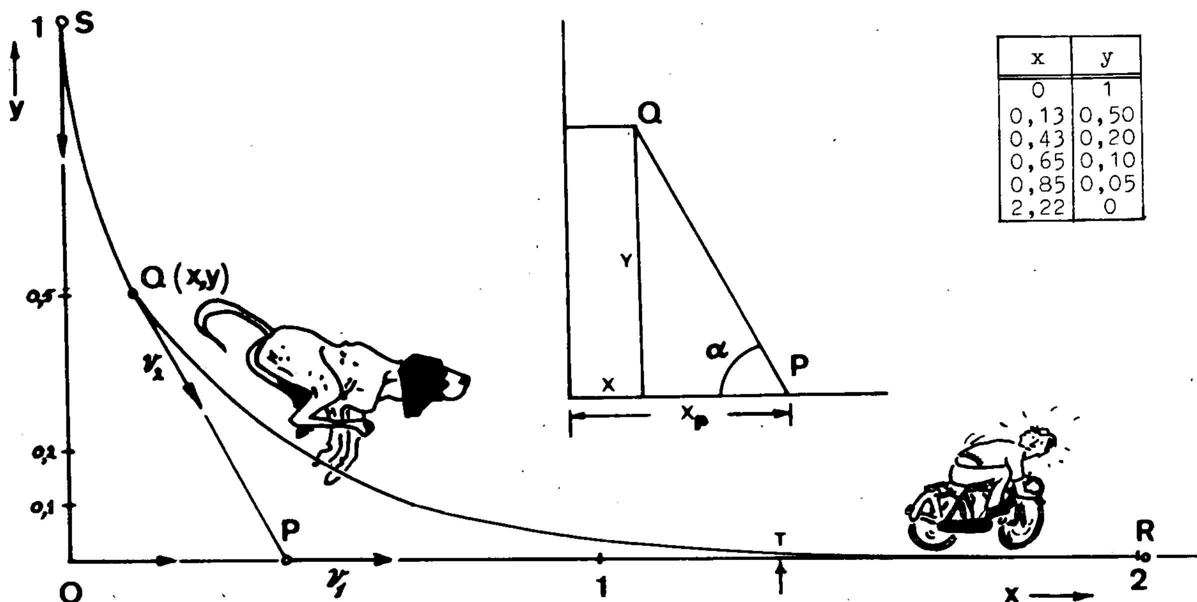
Een aardig boekje dat een heldere kijk geeft op een essentieel aspect van de informatica.

P. G. J. Vredenduin

(Zie ook blz. 32).

Er achter aan?

Henk Mulder



x	y
0	1
0,13	0,50
0,43	0,20
0,65	0,10
0,85	0,05
2,22	0

Een fietser rijdt over een weg (de x-as) met een snelheid v_1.
In punt $S(0, 1)$ loert een hond en op het moment dat de fietser voorbij komt en het dichtst bijgelegen punt $O(0, 0)$ passeert, rent hij er met een snelheid v_2 op af. Bij deze rush corrigeert de hond de richting van de snelheid voortdurend, zodat deze vektor steeds blijft wijzen in de richting van de fietser. De hond probeert op die manier de fietser te pakken te krijgen. Bij een zekere waarde v_2 (groter dan v_1) lukt dit in het punt R.
We proberen een analyse te maken van de kromme, die de hond beschrijft.[1])

Relatie y en y'

Op zeker moment is de fietser in P en de hond in $Q(x, y)$.

Dan geldt in punt Q:

$$y' = -\frac{y}{x_p - x} \text{ of } x_p = x - \frac{y}{y'} \qquad (1)$$

De hond heeft dan langs de kromme een afstand afgelegd:

$$\int_0^x \sqrt{(1 + y'^2)}dx \;^{2})$$

en de daarvoor benodigde tijd is dan:

$$\frac{1}{v_2}\int_0^x \sqrt{(1 + y'^2)}dx \;^{3})$$

In die tijd heeft de fietser een afstand afgelegd:

$$\frac{v_1}{v_2}\int_0^x \sqrt{(1 + y'^2)}dx = x_p$$

zodat

$$k\int_0^x \sqrt{(1 + y'^2)}\, dx = x - \frac{y}{y'} \text{ waarbij } k = \frac{v_1}{v_2}$$

Door differentiëren vinden we:

$$k\sqrt{(1 + y'^2)} = 1 - \frac{y'^2 - yy''}{y'^2}$$

$$\text{of } k\sqrt{(1 + y'^2)} = \frac{yy''}{y'^2}$$

$$\text{of } \frac{ky'}{y} = \frac{y''}{y'\sqrt{(1 + y'^2)}}$$

Na integreren krijgen we:[4])

$$k \ln |y| = \ln \left| \frac{Ay'}{1 + \sqrt{(1 + y'^2)}} \right|$$

$$\text{dus } y^k = \frac{Ay'}{1 + \sqrt{(1 + y'^2)}}$$

$$\sqrt{(1 + y'^2)} = Ay^{-k}y' - 1$$

$$\text{of } y' = \frac{-2Ay^{-k}}{1 - A^2y^{-2k}}$$

In het punt (0, 1) loopt de raaklijn verticaal, waaruit volgt: de constante $A = \pm 1$ [5])
Kiezen we voor de kromme in het eerste kwadrant dan is $A = -1$.

De relatie tussen y en y' wordt dan:

$$y' = \frac{2y^{-k}}{1 - y^{-2k}} \text{ of } y' = \frac{2y^k}{y^{2k} - 1} \qquad (2)$$

Bepaling van de vergelijking van de kromme (voor k ≠ 1)

Schrijf (2) aldus: $y^k y' - y^{-k}y' = 2$
Door integratie vinden we:

$$\frac{1}{1 + k}y^{1+k} - \frac{1}{1 - k}y^{1-k} = 2x + B$$ [6])

De kromme gaat door (0, 1) dus:

$$\frac{1}{1 + k} - \frac{1}{1 - k} = B \text{ zodat } B = \frac{-2k}{1 - k^2}$$

De algemene oplossing wordt dan:

$$\frac{1}{1 + k}y^{1+k} - \frac{1}{1 - k}y^{1-k} = 2x - \frac{2k}{1 - k^2} \qquad (3)$$

En hiermee hebben we een relatie tussen x en y. Als we een van deze krommen willen schetsen door een aantal punten te berekenen, kunnen we het beste een zekere waarde voor y kiezen en de bijbehorende x bepalen. Voor $k = 0$ (hond staat stil) gaat deze over in $x = 0$, zijnde de y-as.

Punt van inhalen
De hond 'pakt' de fietser in het punt R. Daar geldt: $y = 0$.
Dit ingevuld in (3) geeft (omdat $k < 1$): $x = \frac{k}{1 - k^2}$

De coördinaten van R zijn dus $\left(\frac{k}{1 - k^2}, 0\right)$ (4)

Raaklijnrichtingen
Met (2) kunnen we raaklijnrichtingen bepalen.
In het beginpunt S valt de raaklijn samen met de y-as.
In het eindpunt R geldt $y' = 0$; de raaklijn valt samen met de x-as. De kromme raakt dus aan beide assen.[7])

Afstand hond-fietser

We zoeken een formule voor de afstand PQ.

$$PQ^2 = y^2 + (x_p - x)^2$$

of volgens (1): $PQ = \sqrt{\left(y^2 + \frac{y^2}{y'^2}\right)}$ of

$$PQ = y\sqrt{\left(1 + \frac{1}{y'^2}\right)},$$

hetgeen na invulling van (2) geeft:

$$PQ = y\sqrt{\left(1 + \frac{(y^{2k} - 1)^2}{4y^{2k}}\right)}$$

$$\text{of PQ} = \tfrac{1}{2}y^{1-k}(1 + y^{2k}) \qquad (5)$$

Controle:
als $y = 1$ dan $PQ = 1$ (moment van de start)
als $y = 0$ dan $PQ = 0$ (moment van inhalen)
Voor het geval dat de snelheden van hond en fietser even groot zijn ($k = 1$) wordt deze afstand:
$PQ = \frac{1}{2}(1 + y^2)$

Dit betekent dat voor de waarde $y = 0$ we voor $PQ = \frac{1}{2}$ zouden vinden, waaruit volgt dat de hond in dat geval de fietser niet kan inhalen. De langste afstand is dan 1 en de kortste $\frac{1}{2}$.

Wat gebeurt bij k groter dan 1?

Schrijf $PQ = \dfrac{1 + y^{2k}}{2y^{k-1}}$. Voor y nadert naar nul nadert de waarde van PQ tot oneindig. De hond kan de fietser nu helemaal niet meer inhalen!

Uitgewerkt voorbeeld[8])

In de getekende grafiek zijn we uitgegaan van de waarde $k = 0{,}8$. De vergelijkingen (2) tot en met (5) gaan dan over in:

(2) $y' = \dfrac{2y^{0,8}}{y^{1,6} - 1}$

(3) $\dfrac{1}{1{,}8}y^{1,8} - \dfrac{1}{0{,}2}y^{0,2} = 2x - \dfrac{40}{9}$

(4) $R\left(\dfrac{20}{9}, 0\right)$

(5) $PQ = \frac{1}{2}y^{0,2}(1 + y^{1,6})$

We kiezen een zekere waarde van $y\,(0 \leqslant y \leqslant 1)$ en berekenen met (3) de bijbehorende waarde van x. Zo heeft bijvoorbeeld Q de coördinaten $(0{,}13, 0{,}50)$. Met (2) bepalen we vervolgens in Q de waarde y'.
We vinden: $y' = -1{,}71$. Dus $\alpha = 60°$.
Vervolgens bepalen we de positie van het bijbehorende punt P met behulp van (1). Hieruit volgt: $x_p = 0{,}42$.
Ten slotte berekenen we de afstand $PQ = 0{,}58$.
Als we deze afstand delen door de snelheid van de fietser (x_p / v_1) vinden we het bij de posities van P en Q passende tijdsmoment, uitgaande van $t = 0$ in de oorsprong.
Het zal duidelijk zijn dat alle vermelde uitkomsten afgeronde waarden zijn.

Kortste weg en kortste tijd

Als de hond intelligent was, zou hij de fietser eerder kunnen inhalen. Dan moest hij langs een rechte lijn naar het trefpunt T (zie pijl) rennen.
Waar ligt dat punt T?
In driehoek OTS hebben de zijden OT en ST een verhouding van $v_1 : v_2$. Als we stellen $v_1 / v_2 = k$ dan volgt de lengte OT uit:

$$OT = \frac{k}{\sqrt{(1 - k^2)}}$$

Omdat $OR = \dfrac{k}{1 - k^2}$ vinden we voor de verhouding $OT : OR = \sqrt{(1 - k^3)} : 1$
Voor het geval $k = 0{,}8$ geldt dan: $OT : OR = 0{,}6$.
Dit is dan tevens de tijdsverhouding.
In de ruimtevaart probeert men vanaf de aarde de maan of een planeet te bereiken. Hierbij worden banen benut die niet de kortste tijd vergen, maar de minste energie. Daarbij zijn elliptische banen favoriet in het krachtenspel van de diverse gravitatievelden.

Noten

De redaktie verzocht mij een aantal voetnoten aan dit verhaal toe te voegen, wat nadere toelichting en hoe technici met wiskundige notaties omspringen.

1 Lang geleden tijdens mijn gymnasiumtijd in Den Haag kwam ik in de wiskundeles in aanraking met cartesische coördinaten. Een hoogtepunt was daarbij voor mij het zoeken van, wat we toen noemden, wie had dat ooit verzonnen, 'meetkundige plaatsen'.
Punten maakten volgens bepaalde opdrachten (laat een loodlijn neer, bepaal het snijpunt van ...) verrassende en bizarre banen over het papier. De wiskunde werkte als tovenaar, als computer. Als je de trucjes kende, kreeg je een keurige kromme, die je punt voor punt kon schetsen. Voor mij uitermate fascinerend!
We hadden toentertijd dr. Burgers als leraar en die schafte op zekere dag de y-as af. Hij stichtte daarbij een soort nieuwe partij.

U zult in dit artikel wellicht wat afwijkende notaties aantreffen. Sorry, technici zijn wat eigenwijs. Ze gebruiken de wiskunde als 'meisje voor halve dagen', die de vaat en de bedden doet. Ze blijven dan ook gewoon $y = 2x^2$ schrijven waar u allang $f: x \rightarrow 2x^2$ noteert. Maar dat vinden ze veel te gecompliceerd; het andere werkt ook en schrijft vlotter. Zo staat hier ook y' in plaats van $f'(x)$ enz. Zo zijn er zo veel van die dingen. Zo is $y = \sin x$ de vergelijking van een functie en als je x en y wisselt is het ineens geen functie meer. Voor technici is het enige verschil je hoofd een beetje draaien. Zo roepen ze bij het zien van de zijkant van een wenteltrap: hoera weer een sinus!

Ten slotte nog enkele opmerkingen over grafieken. In de wiskundeles zijn grafieken meestal uitbeeldingen van relaties, een soort abstracte kunst.

In technische artikelen zijn grafieken meestal heel concrete vormen en banen. Zo is een fietsvelg een cirkel en wordt een koeltoren begrensd door een hyperbool. Vaak gaat het ook om banen: een werpkromme is een parabool en een satellietbaan een ellips.

Om dat laatste gaat het hier: zoek de vergelijking van de baan die de hond beschrijft (functioneel verband tussen y en x) en construeer daarna die baan punt voor punt. En daarbij verstaan we helemaal niet meer 'met passer en liniaal' zoals in oeroude tijden.

Ook de wiskunde is aan mode onderhevig!

2 Dit is de standaarduitdrukking voor de lengte van een kromme. Een stuk dx loodrecht op een stuk dy heeft als hypotenusa een stuk kromme met een lengte

$$\sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2]} \quad \text{of} \quad \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}\,dx$$

Onder x verstaan we x_Q, waarbij x_Q even als constante wordt opgevat.

3 Omdat bij beweging met constante snelheid geldt: tijd = afgelegde weg : snelheid

4 Het integreren van het rechterlid is hier een hele klus. Het beste lijkt voor de heel serieuze lezers, om het resultaat door differentiëren te controleren. Ook dat is nog een stevig werkje, maar u zult zien dat het klopt.

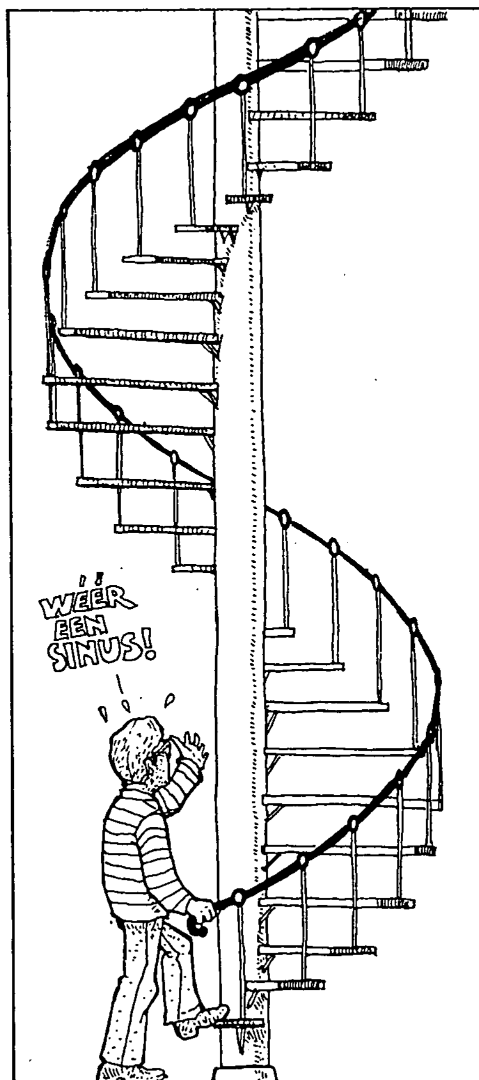
5 Een vertikale raaklijn in (0,1) betekent daar: $y' = \infty$ (durft u dat ook zo te schrijven) waaruit volgt:

$1 - A^2 y^{-2k} = 0$ ofwel, omdat $y = 1$, volgt $A^2 = 1$.

6 Want $\frac{d(y^{1+k})}{dx} = (1 + k)y^k \cdot y'$

7 Dat klopt heel goed met de bewegingsrichting van de hond in het startpunt op de y-as en het eindpunt op de x-as.

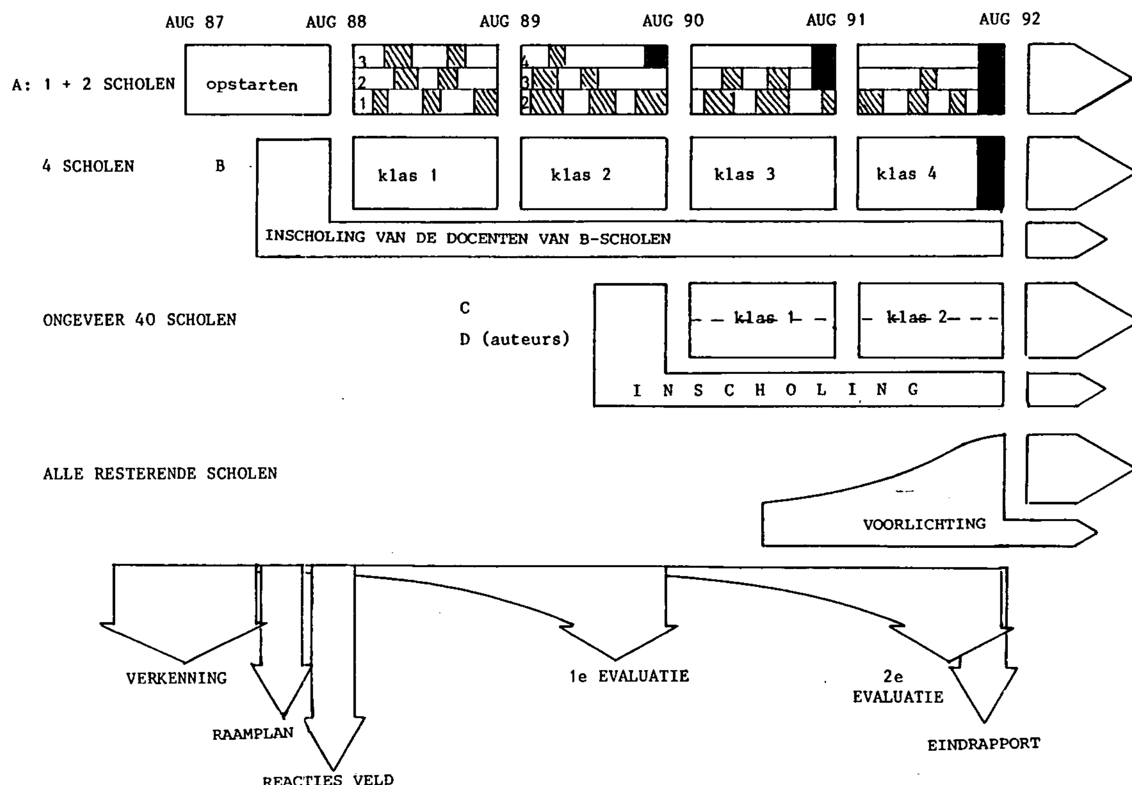
8 Het is niet zo ingewikkeld om de nu volgende berekeningen uit te voeren. Met enige handigheid is een en ander op de rekenmachine na te tikken.



Het laatste nieuws (2)

J. ter Pelle, SLO

De COW heeft besloten haar naam te wijzigen in Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs. Waar nodig kan daar aan toegevoegd worden dat het gaat om leerlingen van 12 tot 16 jaar. Met deze naam wil ze wat nadrukkelijker dan voorheen (Commissie Onderbouw Wiskunde, stuurgroep Van der Blij) tot uitdrukking brengen dat het gaat om een geïntegreerde aanpak van de ontwikkeling en beoogde inhoudelijke vernieuwingen van het wiskundeonderwijs. Het gaat dan vooral om de integratie en onderlinge afstemming van activiteiten op het gebied van het wiskundeonderwijs als onderzoek, leerplan- en toetsontwikkeling, in- en bij- en nascholing, begeleiding etc. Een 5-jarenplan waarin deze geïntegreerde aanpak wordt uitgewerkt is inmiddels goedgekeurd door nu deelnemende instanties (SLO en OW & OC) en begin juli door Prof. Van der Blij aan de staatssecretaris aangeboden[1]. Ook de VALO Wiskunde en Informatica heeft positief over dit plan geadviseerd. Verwacht mag worden dat al voor 1 augustus officieel groen licht gegeven zal worden aan de uitvoering van dit plan. Eerdere signalen hadden immers ook ongeveer die kleur. Dit betekent ook groen licht voor alle medewerk(st)ers van het team die het plan onder COW-vlag gaan uitvoeren.[2] Ook groen licht voor de wiskundesecties van de drie scholen waar dit cursusjaar al met het feitelijke ontwikkelwerk kan worden begonnen: Radboud-mavo Oldenzaal, mavo-leao Lunetten in Utrecht en de



scholengemeenschap Greydanus in Zwolle. Het opstarten van dit ontwikkelwerk zal het eerste jaar vooral bestaan uit studie, observaties op scholen, een begin maken met de inscholing[3], veel in- en extern overleg, teamvorming, en vanzelfsprekend het ontwerpen en uitproberen van experimentele leerlingen- en docentenmaterialen rond leerstofkernen[4]. Tevens is het een belangrijke taak om het veld uitgebreid en continu inhoudelijk te informeren over de voortgang in het ontwikkelwerk[5]. Aan het eind van dit eerste projectjaar zal een raamplan (inclusief een door de bewindslieden gevraagd eerste eindtermenontwerp) worden opgesteld waarin de mogelijke inhoud van het nieuwe wiskundeprogramma globaal wordt aangegeven[6]. Het veld zal de gelegenheid krijgen op de inhoud van dit raamplan te reageren. Deze reacties worden meegenomen in de experimenten die vanaf augustus 1988 in volle hevigheid van start zullen gaan. Er komen dan 4 scholen bij waar vanaf klas 1 met nieuwe materialen wordt gewerkt. Voor de betrokken scholen worden examenfaciliteiten aangevraagd, zodat ervaring kan worden opgedaan met lbo- en mavo-examens met nieuwe opgaven[7]. Over de verdere globale fasering van activiteiten werd in 'Het laatste nieuws (1)' reeds bericht, maar het schema op pagina 23 vat een en ander nog eens summier samen.

Met de goedkeuring van het 5-jarenplan zijn al vele problemen opgelost en is een goede start van het werk mogelijk. Vele nieuwe problemen dienen zich nu aan en zullen moeten worden aangepakt:

- educatieve software, wel expertise en goede ideeën maar onvoldoende middelen;
- emancipatieproblematiek, er zijn nog te weinig 'harde' onderzoeksgegevens beschikbaar;
- (hoe) kunnen leraren de beoogde veranderingen doorvoeren?
- de (eventuele) invoering van de basisvorming, hoe spoort dat met wat nu in gang gezet is?
- de specifieke problematiek van culturele minderheden en etnische groeperingen is onvoldoende verkend;
- deskundigheid op het gebied van toetsen (in ruime zin) is nog onvoldoende in het team aanwezig;
- relatie met educatieve uitgevers, auteursteams;
- leerplanevaluatie, financiering van de nascholing etc.

In volgende artikeltjes binnen deze rubriek zal naast feitelijke informatie uit commissie en team ook iets meer ingegaan worden op een of meer van deze (nog) onopgeloste problemen.

Noten

1 Het echt laatste nieuws is dat de Staatssecretaris het plan op 13 juli heeft goedgekeurd.
2 Ongeveer 15 medewerkers (m/v) waarbij, alle inspanningen ten spijt, de verhouding m : v = 2 : 1 helaas nog traditioneel genoemd kan worden.
3 Met inscholing wordt bedoeld dat leraren al voor invoering goed op de hoogte moeten worden gebracht met de strekking en intenties van het nieuwe wiskundeonderwijs.
4 Dit laatste in klas 1, 2 en 3; voorlopig zal dit slechts incidenteel en op bescheiden schaal kunnen gebeuren. In het schema is dit gearceerd aangegeven.
5 Deze rubriek zal zich beperken tot korte en zakelijke berichtgeving uit team en commissie.
6 Voorlopig wordt gedacht aan 3 stromen, waarbinnen nog overlap mogelijk is: 'LBO-laag', 'LBO-hoog/MAVO' en 'HAVO/VWO'.
7 In het schema met zwart aangegeven. Geleidelijk kan een groter deel van het examen door nieuwe opgaven vervangen worden.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Jaarvergadering/Studiedag 1987

Tweede uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 1987 op zaterdag 31 oktober 1987 in het gebouw van **Het Nieuwe Lyceum** Jan Steenlaan 38, Bilthoven, 030-78 30 60.
Aanvang 10.00 h
Agenda
9.30 h-10.00 h Aankomst, koffie

10.00 h-10.30 h **Huishoudelijk gedeelte**

a. Opening door de voorzitter, dr. Th. J. Korthagen.
b. Notulen van de jaarvergadering 1986 (zie Euclides).
c. Jaarverslagen (zie Euclides).
d. Decharge van de penningmeester en benoeming van een nieuwe kaskommissie.
Het bestuur stelt kandidaat: drs. S. Garst, Oude Tonge en mw. N. B. Sies-Oosterveld, Delft.
e. Bestuursverkiezing in verband met het periodiek aftreden van L. Bozuwa, dr. Th. J. Korthagen en drs. J. W. Maassen.
De heer L. Bozuwa stelt zich niet herkiesbaar. Het bestuur stelt kandidaat: mw. H. J. Goemans, dr. Th. J. Korthagen, drs. J. W. Maassen.**
f. Vaststelling van de contributie 1988/1989.
Het bestuur stelt voor de contributie vast te stellen op *f* 55,–.

10.30 h-16.30 h **Themagedeelte**

16.30 h-17.00 h **Huishoudelijk gedeelte**

g. Rondvraag
h. Sluiting

**De termijn voor het stellen van tegenkandidaten is inmiddels verstreken (zie Euclides jg 62, nr 9).

Aanmelding
De studiedag is *gratis* voor *leden*.
Niet-leden zijn welkom, van hen wordt een bijdrage in de kosten van *f* 15,– gevraagd.

Bij het verschijnen van een publikatie n.a.v. de studiedag zal deze naar allen, die zich opgegeven hebben, worden gestuurd.

Aanmelding (voor 25-10-87) kan geschieden door middel van:
* een briefkaart (aan de ledenadministratie);
* overmaking van *f* 10,– naar giro 143917, t.n.v. N.V.v.W. te Amsterdam, onder vermelding van 'lunch lid';
* overmaking van *f* 15,–, onder vermelding van 'deelnemer niet-lid';
* overmaking van *f* 25,–, onder vermelding van lunch niet-lid.
* ter plaatse aanmelden kan, de prijzen zijn dan *f* 5,– hoger.

Bereikbaarheid
Per trein: Het Nieuwe Lyceum ligt ruim vijf minuten lopen van het station Bilthoven aan de Jan Steenlaan, die direkt bij het station begint.

Per auto: Vanuit alle richtingen A 27 (Hilversum-Utrecht Oost) *Afslag Bilthoven-Maartensdijk.* Rijrichting Bilthoven. Bij het eerste stoplicht rechts: Gezichtslaan. Uitrijden tot T-kruising, (schuin) rechtsaf: Soestdijksestraatweg. Vlak voor de spoorwegbomen bij het stoplicht rechtsaf: Jan Steenlaan.

Toelichting op het themagedeelte

Het centrale thema is: *bewijzen.*
De middag-lezing zal gehouden worden door Jan van Maanen, met als onderwerp Q.E.D.
Generaties wiskundigen zijn groot geworden met Q.E.D. Als ze een bewijs voor een stelling geleverd hadden, dan schreven ze daar Q(uod) E(rat) D(emonstrandum) onder: 'hetgeen te bewijzen was'. De lezing zal gaan over het mysterieuze proces tussen de formulering van een stelling en het bevrijdende Q.E.D., en vooral over de vraag hoe dat proces er in de loop van de tijd uitgezien heeft. Wat was eigenlijk een bewijs', daar zal het om draaien. Ofwel: Q(uid) E(rat) D(emonstratio)? Q.E.D.

Korte omschrijvingen van de werkgroepen:

1 Bewijzen, redeneren, spelletjes en puzzels

Door zowel instap-spelen, oefen-spelen, strategie-spelen als vele puzzels wordt een beroep gedaan op de eigen activiteit van alle betrokkenen. Belangrijk daarbij is het al redenerend herkennen en voortzetten van patronen. Met name bij strategie-spelen en puzzels levert dit de mogelijkheid van het leren opstellen van hypothesen omtrent een winnende strategie resp. oplossing. Het opstellen en toetsen van deze hypothesen kan een bijdrage leveren aan het leren bewijzen.

In de werkgroep zullen de voorgaande ideeën aan de hand van enkele voorbeelden nader uitgewerkt worden.

2 Logisch denken, bewijzen als didactisch hulpmiddel

In de dagelijkse praktijk van het lesgeven worden we regelmatig geconfronteerd met onjuiste en/of onvolledige gedachtegangen en vooronderstellingen. We willen in deze workshop een aantal van deze gedachtegangen en vooronderstellingen uit de eigen ervaring van de deelnemers verzamelen en aan een nader onderzoek onderwerpen. Centrale vraag bij het onderzoek van de aangedragen voorbeelden is: hoe gaan we om met een onjuiste en/of onvolledige gedachtegang of vooronderstelling van een leerling? Wat doen we eraan, wat doen we ermee? We hopen met deze workshop te bereiken dat wiskundedocenten in de toekomst meer bewust zijn van en constructiever kunnen omgaan met gedachtegangen en vooronderstellingen van leerlingen. We hopen gereedschap aan te dragen waarmee wiskundedocenten in hun lessen onjuiste gedachtegangen en vooronderstellingen van leerlingen beter kunnen hanteren.

3 Bewijzen en computers

Er zijn veel mogelijkheden om m.b.v. computerprogramma's en computertalen vele aspecten die bij bewijzen een rol spelen te oefenen:

- onderzoek naar axioma's
- werken met spelregels in formele systemen
- gebruik van abstracte of formele taal
- onderzoek naar stellingen, stellen van hypothesen
- aannemelijk maken van stellingen of beweringen en overtuigen van de juistheid
- snel rekenen op zoek naar tegenvoorbeelden
- bewijzen?

In de werkgroep kan natuurlijk niet alles aan bod komen. Er is een keus gemaakt. We gaan m.b.v. een spreadsheet kijken hoe je formules kunt bouwen door experimenteel te manipuleren met getallen. Misschien zijn de experimenten wel zo om te vormen dat bewijs via inductie voor de hand ligt, zodat zonder dat het bewijs geleverd is, het begripswerk daarvoor al verricht is. Aan de hand van de nabespreking van dit practicum kunnen zijstapjes gemaakt worden naar de andere ideeën.

4 Wat is wiskunde?

Bij discussies over vernieuwing in het wiskundeonderwijs komen we vaak op die vraag uit. Deze keer beginnen we met die vraag. We doen dat aan de hand van twee boeken van het wiskundige schrijversduo Davis & Hersch. De boeken zijn: *The mathematical experience* en *Descartes' Dream.* Overal in de betere boekwinkel verkrijgbaar. Maar gelezen hebben is niet noodzakelijk voor deze werkgroep. Aan de hand van voorbeelden gaan we in op vragen als:

- wat zijn de dingen waar wiskunde nu echt over gaat?
- als de formules maar bijzaak zijn, wat is dan wel van belang?

Hoewel Davis & Hersch het anders formuleren, gaan we ook in op de kwesties:

- is A-wiskunde wel wiskunde?
- is er nog wiskunde na de computer?

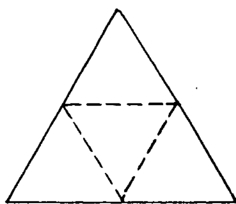
Een klein practicum maakt deel uit van de werkgroep, die voor alle wiskundige gezindten open staat, maar een speels-filosofische, misschien niet direct praktische koers vaart.

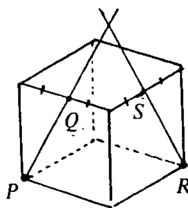
5 Inversie

De werkgroep zal zich bezig houden met een afbeelding die niet in het voortgezet onderwijs aan de orde komt. Vragen hierbij zijn: Wat onderga je als je moet nadenken over een logisch probleem dat nieuw voor je is en waarbij het redeneren (in de betekenis van bewijzen) een centrale rol speelt? Denk je dat leerlingen op een ander niveau deze ervaringen ook hebben? Zo ja, heeft een en ander consequenties voor je werken in de klas?

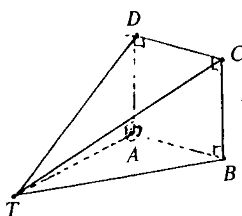
6 Bewijs in de ruimte

1 De lichaamsdiagonalen van een kubus delen elkaar middendoor.

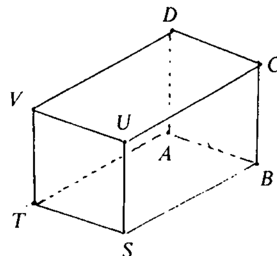

Figuur 1



Figuur 2 (kubus)



Figuur 3



Figuur 4

2 Figuur 1 is het bouwplaatje van een tetraëder.
3 Een vlak snijdt een bol volgens een cirkel.
4 De lijnen PQ en RS snijden elkaar (zie fig. 2).
5 Er bestaat een bol die door A, B, C, D en T gaat (zie fig. 3).
6 De zonneschaduw van een kubus op een vlak kan geen vijfhoek zijn.
7 De inhoud van een piramide is $\frac{1}{3} \times$ grondvlak $\times$ hoogte.

Ooit had ik een leerling met een meer dan voortreffelijk ruimtelijk inzicht. Toch haalde hij voor stereometrie niet hoger dan 6. Hij kon maar niet begrijpen hoe je moest bewijzen wat je zo zag.
Zo zien is subjectief, *bewijzen* lijkt objectief.
Vergelijk de zeven uitspraken hierboven.
Van 1, 2 en 3 zullen veel mensen zeggen: dat zie je zo. Bij 7 verwacht ik dat van niemand. Dubieuzer zijn 4, 5 en 6. Bij 4 zou je kunnen zeggen: ik zie dat PQ en RS elkaar snijden vanwege de symmetrie. Hoe scherp slijpt de leraar die vraagt om een nadere verklaring?
Als 5 wordt gewijzigd in: er bestaat een bol door T, S, U, V, A, B, C, D (zie fig. 4), mag je dan wel zeggen: dat zie je zo? Maar dan is de oorspronkelijke 5 ook onmiddellijk duidelijk. Is 'bewijzen' hetzelfde als 'terugbrengen tot wat je zo ziet'?

Bij 6 zou het kunnen gebeuren dat mensen gewapend met een kartonnen kubus op een zonnig terras de stelling willen staven. Het experiment als bewijs. Trouwens ook 7 kan langs experimentele weg worden aangetoond. In strijd met de spelregels?
De naam van dit tijdschrift herinnert ons aan de tijd dat het leven op school eenvoudig was: bewijzen moest! Altijd. Gek eigenlijk dat algebra stelkunde, maar meetkunde geen bewijskunde heette. Gek ook omdat meten nooit mocht.

Bewijzen is niet meer wat het geweest is. Het leven met de ruimtemeetkunde van nu lijkt wat onbestemd. Het vraagt opportunisme van leraar en leerling. Maar zolang er centrale examens bestaan zal er behoefte zijn aan een zekere communis opinio over de interpretatie van opdrachten als: bewijs, toon aan, laat zien, beredeneer, ...
Het programma van de werkgroep gaat over zulke vragen als:
- Moet je dat nou bewijzen of niet?
- Wanneer reken ik een bewijs volledig?
- Neem ik genoegen met een 'pre-formeel' bewijs?

Na een korte inleiding zal het programma bestaan uit een practicum en een discussie. Het zou aardig zijn als een aantal deelnemers zelf een twijfelgeval uit de ruimtemeetkunde in portefeuille heeft.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

In de tweede ronde van de Vlaamse Wiskunde Olympiade 1987 kwamen enkele leuke opgaven voor. Hieronder een tweetal. Om het multiple-choice-karakter te elimineren heb ik één ervan wel vrij ingrijpend moeten wijzigen.

571 Een specialist in geheimschrift ontwerpt de volgende methode om positieve gehele getallen te coderen.
Eerst worden de getallen in het talstelsel met grondtal 5 geschreven; daarna worden de cijfers 0, 1, 2, 3, en 4 voorgesteld door de letters V, W, X, Y en Z (maar niet per se in deze volgorde).
Hieronder staat een rij van vijf getallen die vijftallig geschreven uit drie cijfers bestaan. Gegeven is dat deze rij van vijf getallen stijgend is: VYZ, VYX, VVW, WXW, WVY.
Schrijf het getal ZVW nu in het tientallig stelsel.
Eén van de gegevens is overbodig. Welk?

572 Beschouw de rij getallen gedefinieerd door $t_1 = 1$, en voor $n > 1$
$t_n = 1 + t_{(n/2)}$ als n even is, en
$t_n = \dfrac{1}{t_{n-1}}$ als n oneven is.
Gegeven is dat $t_k = \frac{19}{87}$. Gevraagd k.

573 In de redactie kwam de vraag naar voren of het stimulerend zou werken als de gelegenheid zou worden geboden oplossingen in te zenden.
Bij wijze van proef wil ik het volgende graag proberen. De hier volgende opgave sluit aan op de voorgaande.

a Welke getallen komen voor in de rij t?
De verzameling van deze getallen noemen we T.

b Voor de rij t geldt: $t_2 = 2$ en $t_3 = \frac{1}{2}$. We beschouwen nu twee rijen, u en v, die op dezelfde manier gedefinieerd zijn als de rij t, maar waarbij $u_1 = 2$ respectievelijk $v_1 = \frac{1}{2}$.
Vergelijk de structuur van de rijen t, u en v.
Hint: ga na welke rangnummers de termen van u en v in de rij t hebben.

c De verzameling van de termen van u noemen we U, de verzameling van de termen van v noemen we V.
Welk verband bestaat er tussen T, U en V?

d r_p is de rij die analoog gedefinieerd is als de rij t, waarbij $(r_p)_1 = t_p$.
De verzameling van de termen van r_p noemen we R_p.
Tracht de onder b en c gevonden resultaten te generaliseren tot uitspraken over r_p en R_p.

Gaarne verwacht ik uw oplossing aan bovenstaand adres binnen een maand na het verschijnen van dit nummer. Uit de ingezonden oplossingen zal ik er dan één publiceren.

Oplossingen

569. Een cirkelschijf is in n sectoren verdeeld, cyclisch genummerd 1, 1, ..., n ($n \geqq 3$). Men plaatst n eveneens 1, 2, ..., n genummerde fiches op de sectoren zo, dat elk fiche terechtkomt op de gelijkgenummerde sector of op een van de beide aangrenzende sectoren. Op elke sector komt een fiche terecht. Op hoeveel manieren is dit mogelijk? (P. Bronkhorst)
Komt fiche p op sector $p - 1$ terecht, dan zeggen we dat op dit fiche operatie a is uitgevoerd. Komt fiche p terecht op sector p of op sector $p + 1$, dan zeggen we dat operatie b resp. c is uitgevoerd. ($1 - 1 = n$ en $n + 1 = 1$.)
Hieronder staan de consequenties van de 9 paren operaties die op twee aangrenzende fiches (genummerd 2 en 3) uitgevoerd worden.

fiche	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4
	a a a (en verder steeds a)	c a b b of c	c a c a
sector	1 2	1 3	1 4
fiche	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4
	b a	b b b of c	b c a
sector	2 2 (kan niet)	2 3	2 4
fiche	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4
	c a b of c	c b	c c c (en verder steeds c)
sector	3 2	3 3 (kan niet)	3 4

De twee gevallen waarbij steeds a of steeds c voorkomt, noemen we triviaal. In de resterende gevallen komt na elke c een a en worden de resterende plaatsen opgevuld door operaties b. (Het geval 'steeds b' wordt dus niet tot de triviale gerekend.)
Iedere manier van plaatsen kunnen we zo door een serie letters a, b, c, voorstellen.
We bewijzen nu: het aantal niet-triviale manieren om $n + 2$ fiches op $n + 2$ sectoren te plaatsen is gelijk aan de som van de aantallen niet-triviale manieren om n fiches op n sectoren en om $n + 1$ fiches op $n + 1$ sectoren te plaatsen.
Met elke plaatsing van $n + 2$ fiches op $n + 2$ sectoren laten we een plaatsing van n fiches op n of van $n + 1$ fiches op $n + 1$ sectoren corresponderen. De operaties op de fiches 2, 3, ..., $n - 1$ laten we daarbij steeds ongewijzigd. We ontwerpen eerst enkele notaties.
De operaties op de fiches n, $n + 1$, $n + 2$, 1 zijn resp. b, c, a, c. Hiermee laten we corresponderen operaties op n fiches waarbij op n, 1 uitgevoerd wordt resp. b, c. We noteren deze correspondentie b c a c → b . . c.
De operaties op de fiches n, $n + 1$, $n + 2$, 1 zijn resp. c, a, b, b. We laten hiermee corresponderen operaties op $n + 1$ fiches waarbij op n, $n + 1$, 1 uitgevoerd wordt resp. c, a, b. Notatie: c a b b → c a . b.

De operaties op de fiches n, $n+1$, $n+2$, 1 zijn resp. a, b, c, a. We laten hiermee corresponderen operaties op $n+1$ fiches met op n, $n+1$, 1 uitgevoerd resp. a, c, a. Notatie: a b c a → a . c a.
Nu ontwerpen we de volgende correspondenties:

a b b b → a b . b
a b b c → a b . c
a b c a → a . c a
a c a b → a . . b
a c a c → a . . c
b b b b → b b . b
b b b c → b b . c
b b c a → b . c a
b c a b → b . . b
b c a c → b . . c
c a b b → c a . b
c a b c → c a . c
c a c a → c . . a

Met elke operatie op $n+2$ fiches correspondeert dus een operatie op n of op $n+1$ fiches. Omgekeerd staan rechts alle operaties op n of $n+1$ fiches. Zodat omgekeerd ook met al deze operaties een operatie op $n+2$ fiches correspondeert.
De aantallen niet-triviale gevallen vormen dus een rij van Fibonacci. Deze rij is
1 3 4 7 11 18 29 ...
Strikt genomen moeten we de gevallen met $n = 1$ tot en met $n = 5$ nog afzonderlijk onder de loep nemen. Ik beperk me tot $n = 1$, 2 en 3 en laat de resterende gevallen aan de lezer over.

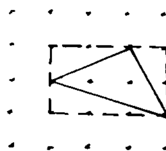
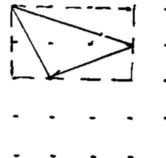
n operaties
1 b
2 ac
  bb
  ca
3 a b c → a . c
  b b b → b . b
  b c a → . c a
  c a b → . . b

Bronkhorst is nog dieper op het probleem ingegaan en heeft ook een niet-recurrente betrekking gevonden voor het aantal niet triviale mogelijkheden. Hij vond:

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{1}{2}n\right]} \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$$

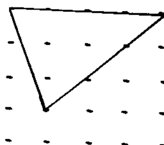
Wie lust heeft, kan dit zelf ook vinden.

570 Op een vierkant geobord met 25 pinnen maakt men driehoeken. Hoeveel verschillende (niet-congruente) driehoeken kan men maken?
Men kan elke verkregen driehoek inlijsten in een rechthoek. Deze rechthoek verschuift men naar links boven, zo ver mogelijk. Minstens één van de hoekpunten van de driehoek is een hoekpunt van de rechthoek. Men kan de rechthoek zo plaatsen dat een dergelijk hoekpunt links boven komt. Zie onderstaande twee figuren.

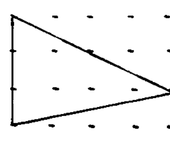
Bovenstaande driehoek is ingelijst in een rechthoek met zijden $p = 3$ en $q = 2$. We geven nu p en q verschillende waarden en vragen telkens hoeveel driehoeken in de rechthoek beschreven kunnen worden. Bij wijze van voorbeeld kiezen we $p = 4$ en $q = 3$.
Er zijn de volgende mogelijkheden. Drie hoekpunten van de rechthoek zijn hoekpunt van de driehoek. Dit geeft 1 mogelijkheid.
Dan twee hoekpunten. We onderscheiden de gevallen:

A en *B*



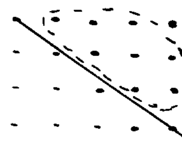
2 mogelijkheden

A en *D*



1 mogelijkheid

A en *C*



8 mogelijkheden (het derde hoekpunt is een van de punten binnen de ellipsvormige kromme)

Dan kan nog A hoekpunt zijn en de driehoek verder een hoekpunt hebben op de zijde BC en een op de zijde CD. Dit geeft 5 mogelijkheden.
De tabel met alle mogelijkheden luidt:

		hoekpunten					
p	q	ABD	AB	AD	AC	A	totaal
1	1	1					1
2	1	1	1		1		3
3	1	1	1		2		4
4	1	1	2		3		6
2	2	1	1		1	1	4
2	3	1	1	1	4	2	9
2	4	1	2	1	5	3	12
3	3	1	1		3	3	8
3	4	1	2	1	8	6	18
4	4	1	2		5	6	14
							79

Deze methode heeft één groot nadeel. Hij is weliswaar generaliseerbaar, maar bij grote waarden van p en q moet men een correctie aanbrengen, omdat men een te grote uitkomst krijgt. Ik laat het aan de lezer over na te gaan waarom zo'n correctie noodzakelijk wordt en tot welke grootte hij bij vierkante geoborden niet optreedt.

Mededelingen

Studium Generale Universiteit Twente

Wiskunde en kunst

Cyclus van drie dinsdagavonden in september. Aanvang 19.30 uur; Vrijhof.
Waar is echte schoonheid te vinden? In de wiskunde, beweert de wiskundige. In de kunst, zegt de kunstenaar. Soms raken deze twee elkaar: in deze cyclus op de terreinen van muziek, veelvlakken en ruimtelijke constructies. Drie avonden lang banen Ars en Mathesis hun weg door de Vrijhof. Met elke keer een wiskundig geïnspireerde kunstenaar die zijn werk presenteert en een kunstgevoelige wiskundige die daarop zijn commentaar levert.

15 september: *Peter Schat*: Het regime van de drieklank, *Henk Barendregt*: Over structuur
P. Schat (Amsterdam) is componist, thans verbonden aan de Opera van Brussel. Hij werkt aan zijn vijfde opera, schreef twee symfonieën, liederen en kamermuziek en hij ontwikkelde de toonklok. H. P. Barendregt (Nijmegen) is hoogleraar Logische Grondslagen van de Informatica; hij speelt in vrije tijd piano en slagwerk.

22 september: *Gerard Caris*: Een vormgeving gebaseerd op de vijfhoek, *Frederik van der Blij*: Regelmatige vijfhoeken, vlak en in reliëf
G. F. Caris (Maastricht) ontving zijn kunstenaarsopleiding aan de Universiteit van Californië. Sings 18 jaar werkt hij aan ontwerpen (kunst, architectuur, omgeving) gebaseerd op de vijfhoek.
F. van der Blij (Utrecht) is hoogleraar wiskunde en tevens voorzitter van de Stichting Ars et Mathesis.

29 september: *Jan Slothouber*: Nieuwe kubische constructies (1984-1986), *Pieter Huybers*: De Platonische en Archimedische veelvlakken en hun nut voor de samenleving
G. J. Slothouber (Son) studeerde bouwkunde en beeldende kunst. Reeds gedurende vele jaren ontwerpt hij kubische constructies. Tot 1983 was hij tevens hoogleraar vormleer aan de Technische Universiteit te Eindhoven. P. Huybers (Delft) is universitair hoofddocent bij de afdeling Civiele Techniek van de Technische Universiteit Delft.

Betaling kontributie

In augustus ontvangen alle leden gratis een acceptgiro ter betaling van de kontributie (*f* 55,–; *f* 37,50) voor het nieuwe verenigingsjaar.
Ruim 90% van de leden betaalt op korte termijn. De overige leden moeten opnieuw aangeschreven worden. Het opsporen en (herhaald) aanschrijven kost veel geld. Daarom verzoekt het bestuur deze leden *voor 1 november* hun kontributie te betalen.
Voor degenen die toch aangeschreven moeten worden zullen de *kosten* per aanschrijving *f 2,50* bedragen.
Als op 1 mei de kontributie over het lopende verenigingsjaar nog niet voldaan is, zal *f 10,–* aan *kosten* in rekening gebracht moeten worden.
Opzeggingen dienen te geschieden *voor 1 juli*.
Tussentijdse opzeggingen zijn niet mogelijk.
De penningmeester.

Van de bestuurstafel

In deze regels had ik u krenten uit de pap beloofd. Ik realiseer me echter dat wat voor de één een krent is, voor de ander nauwelijks te eten pap voorstelt. Nochtans zal ik nog maar wat roeren in de brij van de laatste paar bestuursvergaderingen van voor de vakantie, in de hoop dat er nog wat krenten komen bovendrijven.

Brieven

Onder de ingekomen stukken op de bestuursvergaderingen bevinden zich nogal eens brieven van leden. Niet alleen de laatste maanden, nu het bestuur om reacties heeft gevraagd i.v.m. de 70%-30% regeling (er zijn een twintigtal brieven daarover binnengekomen), maar het gehele jaar door. Wij vinden dat een goede zaak. Het bestuur dient op de hoogte te blijven van wat er onder de leden leeft en deze brieven vormen een middel daartoe. De aangesneden onderwerpen variëren van commentaar op examenopgaven tot voorstellen om Mijnheer Van Dalen aan te passen aan het rekendoosje. Het spreekt vanzelf dat iedere briefschrijver antwoord krijgt, hetzij schriftelijk, hetzij telefonisch, afhankelijk van de aard van het onderwerp. In ieder geval wordt elke brief serieus genomen, want, het zij nog maar eens gezegd: informatie aan het bestuur over hoe men denkt of wat men vindt, is onontbeerlijk voor een goed functioneren van onze vereniging.

Enquête

De bereidheid van de leraren om mee te werken aan de enquête onder de mavo/lbo-kandidaten vlak na het examen was bijzonder groot. Voorzover bekend heeft niemand medewerking geweigerd. Het verwerken van de resultaten bleek een grotere klus dan we ons aanvankelijk hadden voorgesteld. Nu dit gebeurd is, wacht ons nog een moeilijker karwei: de interpretatie van de cijfermatige gegevens. U zult nog even geduld moeten oefenen, er wordt hard aan gewerkt en er zal uitgebreid verslag van worden gedaan in Euclides. Tegelijkertijd zal dan de enquête die tijdens de examenbesprekingen onder de leraren is gehouden, worden besproken.

Hawex

Inmiddels hebben alle scholen een circulaire met bijlagen (rap-

port werkgroep en voorlopig examenprogramma) ontvangen. In tegenstelling tot wat ik eerder vermeldde wordt er op de drie experimenteerscholen geen oude wiskunde meer gegeven. De drie scholen hebben elk één groep wiskunde HA en enkele groepen wiskunde HB.
Met vele leden maakt het bestuur zich zorgen over de voorgestelde snelle invoering: voor alle scholen in 1989. Er is intussen een brief verzonden aan de staatssecretaris waarin er op aangedrongen wordt het tijdpad vast te stellen zoals in het rapport werd aanbevolen, dus scholen zelf laten kiezen tussen invoering in 1989 of in 1990.
Er is een Hawexresponsgroep samengesteld waarin naast vertegenwoordigers van auteursgroepen en Hawexwerkgroep ook wiskundedocenten uit het hoger beroepsonderwijs zitting hebben. Belangrijke activiteiten voor de naaste toekomst zijn:

- Plan voor regionale informatie aan het HBO;
- Gerichte informatie aan auteursgroepen;
- Selectie van 22 scholen voor de tweede fase.

Voor wat het laatste punt betreft heeft het bestuur de resonansgroep in overweging gegeven om er voor te ijveren dat er bij die 22 scholen minstens één school voor volwassenenonderwijs gekozen wordt.
Voor wat betreft het aantal lesuren heeft het definitieve Hawexrapport enige verwarring gezaaid door van een totaal van 250 uur te spreken. Het uitgangspunt van de werkgroep is geweest 9 lesuren (= 5 + 4), maar gezien de plannen om tot een pakket van 7 vakken te komen, zal 8 lesuren (= 4 + 4) wel het gangbare aantal worden.
Een zeer heet hangijzer is het verplicht stellen van wiskunde op het havo, niet in het minst vanwege de gevolgen voor de pakketkeus in het mavo. Maar ook bij het niet verplicht stellen zijn er problemen te over: hoe worden mavoleerlingen en docenten voorgelicht?

Nomenclatuurcommissie

Ook in het blikveld van deze commissie, die inmiddels haar eerste interimrapport (betreffende de nomenclatuur van wiskunde A) heeft aangeboden, doemen wat hangijzers op. B.v. rond wiskunde B: waar begint en waar eindigt de opsomming van wiskundige termen? Welke repercussies zullen de werkzaamheden van de werkgroep differentiaalvergelijkingen op de nomenclatuur van wiskunde B hebben? Trouwens het werk van deze groep is nog niet zo ver gevorderd om in 1989 reeds examens volgens de voorstellen van de werkgroep op te stellen. Het bestuur zal er daarom op aandringen nog een jaar langer geen vragen over differentiaalvergelijkingen op het examen te stellen.

Tekort wiskundedocenten

Het is al onmogelijk de vacatures voor wiskunde te vullen en binnen afzienbare tijd zal het tekort dramatische vormen aannemen. Ter illustratie: voor het komende jaar zijn er op universitaire lerarenopleidingen voor wiskunde slechts 15 belangstellenden in het gehele land.
Omdat bij natuurkunde, scheikunde en economie zich dezelfde ontwikkeling aftekent, lijkt het zinvol samen met de NVON en de Vereniging voor Economiedocenten een brief te schrijven aan de minister om uitdrukking te geven aan onze ernstige zorg.

Leen Bozuwa

Brief aan de Staatssecretaris van O en W

Excellentie,
Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren heeft met instemming kennis genomen van Uw circulaire VO/AV 86-14 C 870029 dd. 6 april 1987.
Het bestuur stelt met tevredenheid vast dat de invoering van wiskunde A en B op het v.w.o. nu een natuurlijk vervolg zal krijgen in alle geledingen van het l.b.o. en het a.v.o.
Voor wat betreft de veranderingen in het l.b.o./m.a.v.o. en de onderbouw v.w.o./h.a.v.o. heeft het bestuur het volste vertrouwen in de commissie Van der Blij. Het bestuur kan zich ook vinden in de opzet van het experiment met twee nieuwe eindexamenprogramma's h.a.v.o., waarbij ontwikkelde teksten eerst op drie en vervolgens op vijfentwintig scholen zullen worden getest en waarbij de leraren in de gelegenheid zullen worden gesteld zich via nascholingscursussen grondig voor te bereiden op het werken met de nieuwe programma's.
Op de hoorzittingen over het 'Voorlopig rapport van de Werkgroep ter voorbereiding van de wijzigingen van het eindexamenprogramma wiskunde h.a.v.o.', in september 1985 georganiseerd door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, bleken de daar aanwezigen in het algemeen een positief oordeel te hebben over de voorgestelde programma's. Bij het bestuur werd er echter op aangedrongen er voor te ijveren dat er veel aandacht zal worden besteed aan de noodzakelijke voorwaarden voor een verantwoorde invoering. Hierbij werd vooral gewezen op een goede nascholing en een ruim tijdschema voor leerstofexperimenten. De voorgestelde tijdschema's in het rapport van de Werkgroep werden eerder als krap dan als ruim beoordeeld.
Nu blijkt dat het tijdschema dat in Uw circulaire wordt vermeld nog korter is dan beide schema's in het rapport.
Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren verzoekt u het tijdschema van de circulaire enigszins bij te stellen en wel zo dat in het cursusjaar 1989/1990 de scholen kunnen kiezen uit twee mogelijkheden:

- òf het oude programma wiskunde vervangen door de nieuwe programma's A en B;
- òf de invoering van de nieuwe programma's één jaar uit te stellen.

Dit schema is gelijk aan het schema A uit het definitieve rapport van de Werkgroep.

Namens het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren,

(J. Maassen)
secretaris

Boekbespreking

Continuum nr. 3. *Visies op metrische meetkunde*, Acco, Leuven-Amersfoort. 1987. 61 blz.. 145 BF.

Wil men de meetkunde axiomatisch opbouwen, dan kan men starten met affiene meetkunde en eerst in een later stadium overgaan tot metriek. Men kan ook direct starten met metrische (euclidische) meetkunde. In dit deeltje wordt door drie auteurs onderzocht, hoe men in het laatste geval te werk kan gaan.
Inge Verbruggen gaat ervan uit dat de leerlingen vertrouwd zijn met de geijkte rechte (getallenrechte). Men moet nu nog de ijk (lengte-eenheid) over kunnen brengen van een rechte op een andere die er niet mee parallel is. Dit geschiedt door middel van een cirkel. Definieert men de cirkel als verzameling punten die gelijke afstand tot een punt hebben, dan geraakt men in een vicieuze cirkel. Een andere definitie van een cirkel is dus vereist. Kies een ijk OA. Trek door O een willekeurige lijn l. Spiegel A in l. Het spiegelbeeld is A_l. De verzameling van de punten A_l is dan een cirkel. Uitgaande van deze grondgedachte bouwt zij op lucide manier een metrische meetkunde op.
Roger Bollens gaat eveneens uit van bekendheid met de getallenrechte. Hij postuleert dat lengte van een lijnstuk invariant is bij spiegeling. Dan volgt als tweede axioma: Op alle halfrechten met beginpunt O bestaat er precies één punt met gegeven afstand van O.
En ten slotte: De afstand van een punt tot zijn loodrechte projectie op een rechte is kleiner dan de afstand van het punt tot elk ander punt op die rechte. Ik vind hem soms moeilijk te volgen. Het is me niet steeds duidelijk wat reeds bekend ondersteld wordt en hoe andere uitspraken uit de axioma's volgen. Om één voorbeeld te noemen: op blz. 28 wordt ervan gebruik gemaakt dat de gelijkheid van lijnstukken commutatief is, maar het is me niet duidelijk hoe dat uit het eerste axioma volgt.
Guido Roels ten slotte gooit het over een didactisch geheel andere boeg. Hij is er voorstander van eerst op intuïtieve wijze een nieuw begrip in te voeren en er een aantal eigenschappen van op te sporen. Eerst daarna wordt deductief verband tussen de eigenschappen gevonden, worden enkele ervan als axioma betiteld en de andere daaruit door deductie afgeleid. Op deze manier wordt dan ook het begrip afstand ingevoerd.
Inge Verbruggen en Guido Roels gaan bovendien in op de hoekmetriek.
Ik heb dit boekje met veel genoegen gelezen.
Ik kan me voorstellen dat sommige lezers het spoor bijster dreigen te raken. Ze hebben in Euclides kunnen lezen dat in de nieuwe leerplannen voor het Rijksonderwijs in de klassen 1 tot en met 4 de axiomatische methode afgeschaft is. Dit is echter niet het geval in het leerplan voor het Vrij (= bijzonder) Onderwijs. En dus is Continuum nr. 3 nog wel degelijk didactisch relevant.

P. G. J. Vredenduin

Kalender

sept. 1987: Enschede, Studium Generale
11 sept. 1987: Eindhoven, Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
31 okt. 1987: Bilthoven, Jaarvergadering/Studiedag NVvW
23 juli-3 aug. 1988: Budapest, ICME-Congres

Inhoud

Adressen van auteurs

drs. W. Kleyne, J. W. Brouwersplein 5, 1071 LL Amsterdam

drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ 's Gravenhage

Ir. H. Mulder, Geersbroekseweg 27, 4851 RD Ulvenhout

J. ter Pelle, p/a SLO, Postbus 2041, 7500 CA Enschede

H. N. Schuring, p/a CITO, Postbus 1034, 6801 MG Arnhem